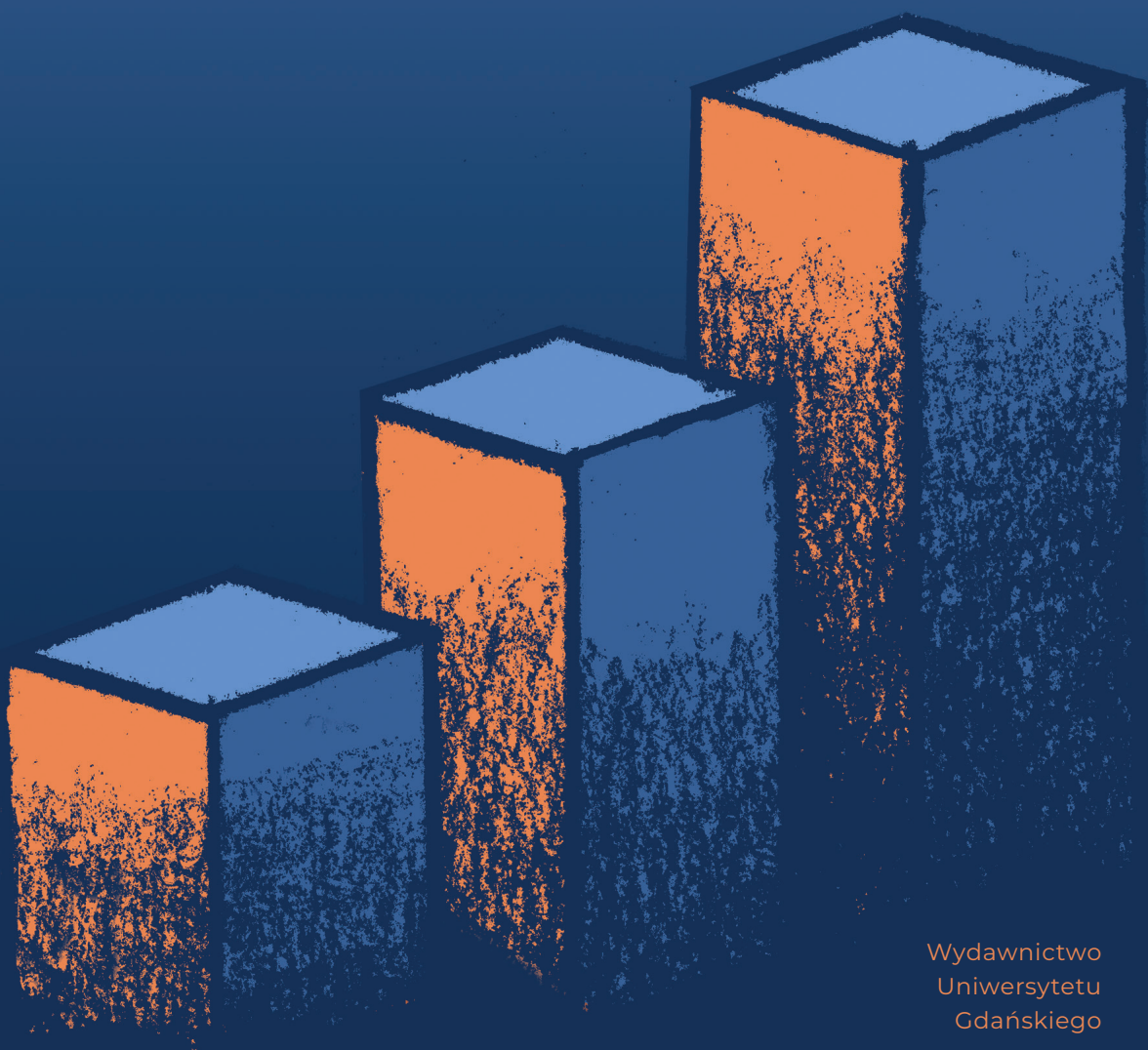


Zastosowania metod ilościowych w ubezpieczeniach

pod redakcją
Ewy Wycinki i Mirosława Szredera



Wydawnictwo
Uniwersytetu
Gdańskiego

Zastosowania metod ilościowych w ubezpieczeniach

Zastosowania metod ilościowych w ubezpieczeniach

pod redakcją

Ewy Wycinki i Mirosława Szredera

Recenzent
dr Wiesława Makać

Redaktor Wydawnictwa
Jerzy Toczek

Projekt okładki i stron tytułowych
Jan Rutka

Skład i łamanie
Mariusz Szewczyk

Publikacja sfinansowana ze środków projektu
PROgram Rozwoju Uniwersytetu Gdańskiego (ProUG)
realizowanego w ramach Programu Operacyjnego Wiedza Edukacja Rozwój
na podstawie umowy nr POWR.03.05.00-00-Z308/17-00, zawartej pomiędzy
Narodowym Centrum Badań i Rozwoju a Uniwersytetem Gdańskim w dniu 11.12.2017 roku



**Fundusze
Europejskie**
Wiedza Edukacja Rozwój



Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny



© Copyright by Uniwersytet Gdański
Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego

ISBN 978-83-8206-043-0 (online)

Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego
ul. Armii Krajowej 119/121, 81-824 Sopot
tel./fax 58 523 11 37, tel. 725 991 206
e-mail: wydawnictwo@ug.edu.pl
www.wyd.ug.edu.pl

Księgarnia internetowa: www.kiw.ug.edu.pl

Spis treści

Wstęp	7
Część I. Metody statystyczne w ubezpieczeniach	
Rozdział 1. Tabelaryczna i graficzna prezentacja rozkładów cech	13
<i>Olga Komorowska</i>	
1.1. Podstawowe pojęcia	13
1.2. Szeregi i tablice statystyczne	18
1.3. Graficzna prezentacja danych	24
Rozdział 2. Statystyczne miary opisu rozkładów cech ubezpieczeniowych	33
<i>Dorota Banaszkiewicz</i>	
2.1. Statystyczne miary opisujące rozkłady cech	33
2.2. Analiza rozkładu liczby szkód	38
2.3. Analiza rozkładu wysokości składki przypisanej brutto	41
2.4. Wskaźniki struktury i natężenia	48
Rozdział 3. Koncentracja rynkowa	59
<i>Ewa Wycinka</i>	
3.1. Istota koncentracji rynkowej	59
3.2. Wybrane wskaźniki koncentracji	61
3.3. Krzywe koncentracji	66
Rozdział 4. Współzależność zmiennych	73
<i>Teresa Plenikowska-Ślusarz</i>	
4.1. Korelacja cech ilościowych	73
4.2. Współzależność cech jakościowych	81
Rozdział 5. Analiza zmian w czasie	85
<i>Teresa Plenikowska-Ślusarz</i>	
5.1. Składniki szeregu czasowego	85
5.2. Wyznaczanie tendencji rozwojowej	89
5.3. Miary dynamiki	95
Rozdział 6. Modelowanie zjawisk ubezpieczeniowych za pomocą rozkładów prawdopodobieństwa	105
<i>Miroslaw Szreder, Anna Gierusz</i>	
6.1. Istota prawdopodobieństwa	105
6.2. Liczba szkód i wartość odszkodowań jako zmienne losowe	112

Rozdział 7. Własności i zastosowanie wybranych rozkładów zmiennych losowych	121
<i>Anna Gierusz</i>	
7.1. Własności wybranych rozkładów skokowych opisujących liczbę szkód . . .	121
7.2. Własności wybranych rozkładów ciągłych opisujących wartości odszkodowań	127
7.3. Aproksymacja rozkładów liczby szkód i rozkładów wartości odszkodowań	136
7.4. Rozkłady ucięte	144
Część II. Metody finansowe w ubezpieczeniach	
Rozdział 8. Oprocentowanie kapitału	149
<i>Ewa Majerowska</i>	
8.1. Odsetki od depozytu	149
8.2. Zasada oprocentowania prostego	150
8.3. Zasada oprocentowania składanego	154
8.4. Stopy procentowe	160
Rozdział 9. Inflacja	167
<i>Anna Zamojska</i>	
9.1. Znaczenie inflacji w ubezpieczeniach	167
9.2. Zależność między inflacją a stopami procentowymi	169
Rozdział 10. Rachunek rent	179
<i>Sabina Nowak</i>	
10.1. Renta – definicja i klasyfikacje	179
10.2. Wartość renty w dowolnym momencie. Równoważność rent	181
10.3. Renty o stałych ratach: płatne z dołu, płatne z góry, wieczyste, odroczone	181
10.4. Renta uogólniona	188
Rozdział 11. Ratalna spłata długów	193
<i>Sabina Nowak</i>	
11.1. Spłaty odsetek i kapitału	193
11.2. Dług o stałych kwotach płatności	198
11.3. Dług o stałych ratach kapitałowych	200
Literatura	207
Akty prawne	211
Spis tablic	213
Spis rysunków	217

Wstęp

Ubezpieczenia stanowią ważny element współczesnej gospodarki i w znaczący sposób przyczyniają się do jej rozwoju. Dzięki ubezpieczycielom wzrasta atrakcyjność rynku inwestycyjnego, a znaczenie zakładów ubezpieczeń jako inwestorów instytucjonalnych stale rośnie. Ubezpieczenia są coraz mocniej powiązane z innymi segmentami rynku finansowego. Ubezpieczyciele współpracują z wieloma podmiotami, w szczególności z bankami, pośrednikami ubezpieczeniowymi i finansowymi, specjalistami, takimi jak rzeczoznawcy, likwidatorzy szkód itp. Ważną rolę w gospodarce odgrywają również instytucje pełniące funkcje nadzorcze i kontrolne rynku ubezpieczeń. Poprzez swoją funkcję ochronną ubezpieczenia warunkują stabilne funkcjonowanie gospodarki.

Identyfikacja prawidłowości zachodzących na rynku ubezpieczeń oraz powiązań zjawisk ubezpieczeniowych między sobą oraz z innymi sektorami gospodarki jest ważna dla wielu różnych podmiotów. Poprawne określenie i opis tych prawidłowości jest możliwy dzięki zastosowaniu metod statystycznych.

Analiza danych statystycznych jest niezbędna dla funkcjonowania zakładów ubezpieczeń, a wykorzystywana jest głównie w zagadnieniach aktuarialnych, w procedurze underwritingowej, marketingowej czy w szeroko rozumianym zarządzaniu. Wszystkie działy zakładów ubezpieczeń wykorzystują metody ilościowe w celu pozyskiwania wiedzy. Dane o rynku ubezpieczeń są ważne dla prawidłowego funkcjonowania organów nadzoru, instytucji wspomagających funkcjonowanie rynku, w tym pośredników ubezpieczeniowych. Umiejętność wykorzystywania metod ilościowych jest również cenna dla samych ubezpieczonych oraz pośredników ubezpieczeniowych, gdyż wspomaga proces racjonalnego podejmowania decyzji finansowych, w tym ubezpieczeniowych.

Autorzy niniejszej monografii postawili sobie za cel przybliżenie Czytelnikowi metod ilościowych, które pozwalają na analizę wielu zjawisk dotyczących rynku ubezpieczeń, jak i na podejmowanie decyzji finansowych przez uczestników tego rynku, w tym ubezpieczonych oraz pośredników ubezpieczeniowych.

Pierwsza część książki, na którą składają się rozdziały 1–7, przedstawia możliwości analizy rynku ubezpieczeń i zagadnień ubezpieczeniowych za pomocą metod statystycznych oraz metod rachunku prawdopodobieństwa. Rozdział 1, stanowiący wprowadzenie do tej części monografii, koncentruje uwagę na dwóch zagadnieniach: konieczności precyzyjnego definiowania badanej populacji (zbiorowości statystycznej) i określania zakresu badania oraz doborze odpowiednich tabelarycznych i graficznych metod prezentacji badanych zmiennych. Uwagę skupiono na problemie odpowiedniego doboru wykresów statystycznych w zależności od rodzaju analizowanych zmiennych i specyfiki ich rozkładów. Rozdział 2 został poświęcony miarom, które służą do opisu tych rozkładów. W rozdziale tym autorzy celowo odstąpili od przybliżania Czytelnikom wzorów statystycznych i pokazywania zasad obliczania poszczególnych miar, gdyż te zagadnienia są szczegółowo opisane w licznych dostępnych podręcznikach statystyki. Ponadto obecnie wiele programów komputerowych, w tym najpopularniejsze arkusze kalkulacyjne, umożliwiają automatyczną analizę danych. Ważna jest jednak umiejętność interpretacji otrzymywanych wyników i rozumienie relacji między wartościami poszczególnych miar. Na ten aspekt został w tym rozdziale położony największy nacisk. Autorzy na przykładach dotyczących rynku ubezpieczeń opisali wady i zalety poszczególnych miar i przedstawili rekomendacje ich doboru odnośnie do różnych rozkładów zmiennych. W kolejnych rozdziałach przedstawiono miary, które muszą być samodzielnie obliczane. Czytelnik znajdzie w nich zarówno wzory, jak i szczegółowy opis sposobu obliczania pokazany na przykładach z rynku ubezpieczeń. W rozdziale 3 przybliżono pojęcie koncentracji rynkowej i przedstawiono graficzne i analityczne sposoby pomiaru jej poziomu. Metody identyfikacji i pomiaru współzależności między zjawiskami, w tym zależności o charakterze przyczynowo-skutkowym, zostały omówione w rozdziale 4. Rozdział 5, zawierający opis metod badania dynamiki zjawisk, zamyka część poświęconą metodom opisu statystycznego.

Rozdziały 6 i 7 przedstawiają ujęcie probabilistyczne problemu. W rozdziale 6 została wyjaśniona istota prawdopodobieństwa i stochastycznego podejścia do dwóch ważnych dla zakładów ubezpieczeń zmiennych: liczby szkód i wartości odszkodowań. Wprowadzone zostały pojęcia rozkładów zmiennych losowych oraz podstawowe funkcje i parametry opisujące rozkłady. W rozdziale 7 zaprezentowane zostały podstawowe rozkłady teoretyczne służące do opisu tych zmiennych: rozkład zero-jedynkowy, dwumianowy i Poissona, do opisu liczby szkód, oraz rozkłady: jednostajny, wykładniczy, normalny i chi-kwadrat – do opisu wartości odszkodowań. Pokazano istotę aproksymacji rozkładów oraz przybliżono pojęcie rozkładu uciętego, który

ma zastosowanie, gdy wysokość szkód przekracza ustalone wysokości sum ubezpieczenia lub zakład ubezpieczeń stosuje ograniczenia odpowiedzialności.

W drugiej części książki autorzy skoncentrowali się na ważnej w sektorze ubezpieczeń problematyce finansowej. Współczesny rynek ubezpieczeń jest częścią rynku finansowego, a w ubezpieczeniach trudną do przecenienia rolę odgrywa funkcja oszczędnościowa. Z tego powodu w rozdziałach 8–11 scharakteryzowano zagadnienia zmiany wartości pieniądza w czasie, rachunku rent i ratalnej spłaty długów.

W rozdziale 8 przybliżono pojęcia stopy procentowej i odsetek oraz różnice między oprocentowaniem prostym i składanym. Na licznych przykładach pokazano, jak obliczać odsetki od zgromadzonego kapitału, jak obliczać przyszłą wartość kapitału w zależności od rodzaju oprocentowania oraz jak porównywać inwestycje finansowe o różnych momentach płatności i różnych rodzajach oprocentowania. W rozdziale 9 wytłumaczono znaczenie pojęcia inflacja i omówiono, jaki wpływ wywiera ona na wartość realną inwestycji. Rozdział 10 zawiera opis renty jako strumienia finansowego oraz przykłady sytuacji, w których mamy do czynienia z rentami. Po przedstawieniu wzorów, które umożliwiają wyliczanie wartości rat i innych wielkości charakteryzujących różne rodzaje rent, w rozdziale tym zamieszczono wiele przykładów umożliwiających obliczanie wysokości rat rent jak i porównywanie różnych inwestycji, w których płatności są w formie rent. Rozdział 11 stanowi rozszerzenie tematyki przedstawionej w rozdziale 10 i przedstawia zasady konstrukcji harmonogramów ratalnej spłaty kredytów. Ze względu na to, że zagadnienia dotyczące zmian wartości pieniądza w czasie mają charakter uniwersalny i są ważne w podejmowaniu decyzji finansowych, nie tylko związanych bezpośrednio z ubezpieczeniami, w części drugiej książki (rozdziały 9–11) umieszczono przykłady zarówno z zakresu ubezpieczeń, jak i szeroko rozumianych finansów (inwestowanie kapitału, pożyczki, kredyty). Taki sposób prezentacji tej problematyki powinien ułatwić Czytelnikom głębsze zrozumienie metod analizy zjawisk finansowych i warunków ich stosowania.

Książka jest adresowana do osób zainteresowanych ubezpieczeniami, w tym osób pracujących na rynku ubezpieczeń, które wcześniej w niewielkim zakresie korzystały z metod ilościowych. Autorzy dołożyli starań, aby omawiane zagadnienia były zaprezentowane w sposób prosty i przejrzysty i nie wymagały od Czytelnika specjalistycznego przygotowania. Monografia jest efektem pracy wielu autorów. Poszczególne rozdziały różnią się między sobą sposobem narracji. Mamy nadzieję, że stworzy to możliwość spojrzenia na prezentowane zagadnienia z różnych perspektyw, pozwalając dostrzec

złożoność problematyki ubezpieczeniowej, a przy tym także pewną uniwersalność metod ilościowych.

Za uważną i wnikliwą recenzję autorzy dziękują dr Wiesławie Makać, której cenne uwagi przyczyniły się do udoskonalenia pierwotnej wersji tego opracowania. Wszelkie uchybienia pozostałe w tekście obciążają jednak wyłącznie autorów.

Mirosław Szreder

Ewa Wycinka

Część I

**Metody statystyczne
w ubezpieczeniach**

Rozdział 1

Tabelaryczna i graficzna prezentacja rozkładów cech

Olga Komorowska

Hasła: *zbiorowość, jednostka, liczebność, cechy stałe, cechy zmienne, szereg szczegółowy, grupowanie, szeregi rozdzielcze, tablica, rozkład cechy, wykresy*

1.1. Podstawowe pojęcia

Zakłady ubezpieczeń, nazywane również ubezpieczycielami, mają obowiązek gromadzenia danych statystycznych¹, sporządzania i przekazywania sprawozdań, w tym do celów statystyki publicznej². Obowiązek ten wynika z art. 33 ustawy o działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej. Zakład ubezpieczeń jest zobowiązany również do oceny ryzyka ubezpieczeniowego przy ustalaniu taryf składek. Dokonuje tego m.in. na podstawie zebranych informacji o osobach ubezpieczonych oraz ich szkodowości. Zakłady ubezpieczeń oceniają również swoich pracowników, m.in. agentów, dyrektorów sprzedaży czy dyrektorów produktu, gromadząc odpowiednie dane.

Na rynku ubezpieczeniowym oprócz zakładów ubezpieczeń działają również instytucje, które dysponują danymi na wyższym poziomie agregacji. Komisja Nadzoru Finansowego (KNF), sprawując nadzór nad sektorem finansowym w Polsce, w ramach zapewnienia prawidłowego funkcjonowania rynku ubezpieczeniowego tworzy raporty, opracowania i zestawienia danych statystycznych dotyczących wszystkich zakładów ubezpieczeń działających na terenie Polski. Na stronie internetowej KNF (www.knf.gov.pl) dostępne są powyższe informacje często w formie pliku xlsx oraz pdf. Przykładowo, w raporcie KNF o stanie sektora ubezpieczeń po I kwartale 2019 r. [2019]

¹ Ustawa z dnia 11 września 2015 r. o działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (t.j. Dz. U. z 2019 r., poz. 381).

² Rozporządzenie Ministra Finansów z dnia 29 kwietnia 2016 r. w sprawie dodatkowych sprawozdań finansowych i statystycznych zakładów ubezpieczeń i zakładów reasekuracji (t.j. Dz. U. z 2018 r., poz. 392).

znajdziemy informacje dotyczące m.in. wysokości przychodów i kosztów łącznie wszystkich zakładów ubezpieczeń w podziale na Dział I oraz Dział II ubezpieczeń³.

Polska Izba Ubezpieczeń (PIU) jako organizacja reprezentująca wszystkie zakłady ubezpieczeń opracowuje m.in. roczne raporty dotyczące własnej działalności i działalności zakładów ubezpieczeń na rynku finansowym w Polsce, przeprowadza również własne badania. Na przykład w roku 2019 zostało przeprowadzone badanie w związku ze zmianami klimatu, a jego celem było określenie, w jaki sposób do ochrony majątku podchodzą osoby mieszkające na terenach szczególnie zagrożonych żywiołami. Badanie to nie dotyczyło bezpośrednio zakładów ubezpieczeń, ale odnosiło się do odpowiedzialności osób za swój majątek i podjęcia kroków gwarantujących jego zabezpieczenie w razie zaistnienia szkody powstałej np. na skutek powodzi. Jak wynika z wyników powyższego badania, prawie 80% badanych osób uważało ich miejsce zamieszkania za bezpieczne, pomimo że osoby te mieszkaly na terenach narażonych na działanie żywiołów. Połowa badanych z kolei zgadzała się ze stwierdzeniem, że zmiany klimatu odpowiadają za coraz więcej szkód na świecie, ale jednocześnie twierdziła, że nie dotyczy to ich miejsca zamieszkania [Tarczyński 2019].

Rynkiem ubezpieczeń zainteresowani są także ekonomiści i pracownicy naukowci. Badają oni jego strukturę i dynamikę oraz czynniki rozwoju. Analizują też wskaźniki mówiące o rozwoju rynku ubezpieczeń, m.in. wskaźnik penetracji rynku (udział składki przypisanej brutto w PKB).

W analizach statystycznych określenie zbiorowości jest bardzo istotne, zarówno z punktu widzenia osób je przeprowadzających, jak i odbiorców tychże analiz. Statystyka to nauka badająca zjawiska masowe, czyli badająca **zbiorowości (populacje)** o dużej liczbie jednostek.

Zdefiniowanie populacji zależy od celu badań. Chcąc precyzyjnie określić zbiorowość, należy odpowiedzieć na pytania: kogo lub co badamy (tzw. cecha stała rzeczowa), kiedy przeprowadzamy badanie (tzw. cecha stała czasowa) oraz gdzie, czyli na jakim obszarze (tzw. cecha stała przestrzenna). Dzięki sprecyzowaniu tych własności ustalamy, który obiekt wchodzi do naszej populacji i określamy liczebność populacji.

³ Ustawa o działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej dzieli ubezpieczenia na dwa działy: Dział I (ubezpieczenia na życie), który obejmuje 5 grup ubezpieczeń, oraz Dział II (pozostałe ubezpieczenia osobowe oraz ubezpieczenia majątkowe) podzielony na 18 grup ubezpieczeń. Zakład ubezpieczeń może prowadzić działalność tylko w jednym dziale. Rozpoczęcie działalności wymaga uzyskania zgody organu nadzoru (KNF) na prowadzenie działalności w danym dziale i określonych grupach ubezpieczeń).

W odniesieniu do rynku ubezpieczeń populację możemy przykładowo określić w następujący sposób: wszystkie zakłady ubezpieczeń Działu II (czyli co badamy) na obszarze Rzeczypospolitej Polskiej (gdzie badamy) na koniec I kwartału 2019 r. (na jaki moment przeprowadzamy badanie). Tak zdefiniowana populacja może podlegać analizie przez instytucje rynku ubezpieczeń, jak KNF oraz PIU, a także ekonomistów różnych instytucji. Z punktu widzenia zakładu ubezpieczeń zbiorowością badaną mogą być na przykład agenci w regionie północnym w I połowie 2019 r.

Zbiorowość statystyczna składa się z **jednostek statystycznych** (poszczególne obiekty, elementy), czyli w zależności od celu badania może to być pojedynczy zakład ubezpieczeń, pojedynczy ubezpieczony, pojedynczy produkt lub agent ubezpieczeniowy.

Na etapie przygotowania badania należy sobie odpowiedzieć na pytanie: w jakim zakresie chcemy badać jednostki danej populacji, czyli jakie właściwości tych jednostek (cechy) nas interesują⁴.

Zakłady ubezpieczeń mają obowiązek kalkulowania składki ubezpieczeniowej na poziomie, który z zadaniem prawdopodobieństwem wystarczy na wypłatę świadczeń, na pokrycie kosztów prowadzenia działalności ubezpieczeniowej oraz zapewni ubezpieczycielowi zysk. Kalkulacja składki opiera się na trzech podstawowych zasadach: równowagi składek i świadczeń (równowaga między otrzymanymi składkami a wypłaconymi odszkodowaniami i świadczeniami), proporcjonalności składek i świadczeń (tzw. zachowana korelacja dodatnia pomiędzy składką, która jest funkcją sumy ubezpieczenia, a oczekiwanym świadczeniem ubezpieczeniowym), równowartości składek i świadczeń (składka płacona przez poszczególnych ubezpieczonych powinna być zależna od oceny ich indywidualnego ryzyka). Ze względu na powyższe zasady zakład ubezpieczeń musi zbierać dane zarówno przy zawieraniu ubezpieczenia, jak również przy zajściu zdarzenia ubezpieczeniowego, wypłaty świadczenia czy wypłaty odszkodowania.

Przed uzyskaniem oferty ubezpieczenia osoba ubezpieczająca podaje dane, które są wykorzystywane w celu ustalenia odpowiedniej wysokości składki. W przypadku ubezpieczenia samochodu mogą to być następujące informacje: wiek kierowcy, miejsce zamieszkania, historia szkodowości, posiadane zniżki, posiadanie dzieci, okres posiadania prawa jazdy, fakt posiadania polis innego typu w danym zakładzie ubezpieczeń, marka i model samochodu, wartość samochodu, pojemność silnika, przebieg samochodu. Informacje te

⁴ Więcej na temat jednostek i zbiorowości (populacji) w: [Makać, Urbanek-Krzysztofiak 2008; Szreder 2004].

dotyczą bezpośrednio osoby ubezpieczonej⁵, jak również samego pojazdu. Po podpisaniu umowy ubezpieczeniowej podane wyżej informacje uzupełnione zostaną o wysokość opłaconej składki i ewentualne rodzaje rozszerzeń w podstawowym produkcie ubezpieczeniowym. W trakcie trwania ochrony ubezpieczeniowej powyższe informacje zostaną wzbogacone, jeżeli zajdzie zdarzenie ubezpieczeniowe, o rodzaj szkody i wysokość wypłaconego odszkodowania.

Komisja Nadzoru Finansowego analizuje między innymi poziom składki przypisanej brutto, ponieważ jest to podstawowa wielkość oceniająca strukturę i dynamikę rynku ubezpieczeniowego. Może również analizować takie charakterystyki, jak: świadczenia wypłacone brutto, współczynnik szkodowości, wartość odszkodowań, liczba szkód zlikwidowanych, liczba ryzyk, liczba umów, udział w rynku.

Opisane wyżej przykładowe cechy charakteryzujące badane jednostki statystyczne nazywane są **cechami zmiennymi**⁶, czyli właściwościami, które różnicują poszczególne jednostki statystyczne między sobą. Warianty cech zmiennych mogą mieć formę opisową lub mogą być wyrażone za pomocą wartości liczbowych. Na tej podstawie dzieli się je na dwa rodzaje: na cechy jakościowe i cechy ilościowe.

Cecha zmienna jakościowa to cecha niemierzalna. Warianty tej cechy wyrażone są za pomocą określeń słownych, czasami również za pomocą liczb, ale liczby te nie wyrażają wartości cechy – są przypisanym symbolem, wyrażają zakodowaną własność cechy (tab. 1.1). Cechę jakościową, która przyjmuje tylko dwa warianty (na przykład: mężczyzna/kobieta; tak/nie), nazywa się dwudzielną, gdy natomiast przyjmuje więcej wariantów, np. poziom wykształcenia, jest cechą wielodzielną.

Cecha zmienna ilościowa to taka cecha, której wartości wyrażamy za pomocą liczb mianowanych (np. liczba dzieci, liczba szkód, liczba lat, jednostki wyrażone w zł), dlatego nazywana jest cechą mierzalną. Cecha ta jest określona jako **cecha ilościowa skokowa**, gdy jej warianty są wyrażone za pomocą liczb należących do zbioru przeliczalnego lub skończonego (najczęściej są to liczby całkowite dodatnie, np. liczba szkód, liczba zawieranych polis). Cecha zmienna określona zaś będzie jako **cecha ilościowa ciągła**, w sytuacji gdy warianty będą wyrażone za pomocą liczb rzeczywistych, a pomiędzy dwiema wartościami

⁵ Od grudnia 2012 r. zakłady ubezpieczeń w związku z orzeczeniem Trybunału Sprawiedliwości Unii Europejskiej nie mogą różnicować wysokości składek ze względu na płeć (zakaz dyskryminacji ze względu na płeć).

⁶ W dalszej części publikacji cechy zmienne będą nazywane zamiennie cechami lub zmiennymi.

cechy mogą teoretycznie istnieć inne wartości pośrednie (np. wiek osoby ubezpieczonej w latach, wysokość opłaconej składki w zł).

Tablica 1.1. Wybrane cechy jakościowe wraz z wariantami

Cecha	Warianty cechy	Warianty w formie zakodowanej
płeć	mężczyzna, kobieta	1 (mężczyzna), 2 (kobieta)
wykształcenie	podstawowe, średnie, wyższe	1 (podstawowe), 2 (średnie), 3 (wyższe)
fakt odbycia szkolenia przez agenta	tak / nie	1 (tak), 0 (nie)

Źródło: Opracowanie własne.

Zwróćmy uwagę na fakt, że możliwość analizy danych, jaką możemy dokonać, zależy od tego, z jakim rodzajem cechy mamy do czynienia (cecha jakościowa czy ilościowa). Na przykład, gdy do cechy posiadanie dzieci przypisane są warianty cechy: 0, 1, 2 (...), co sprawia, że cecha ta ma charakter ilościowy skokowy, możemy dokonać obliczeń statystycznych, np. obliczyć średnią liczbę dzieci w grupie osób ubezpieczonych na życie. Gdy tę samą cechę przedstawimy natomiast w postaci wariantów: nie (nie posiada dzieci) oraz tak (posiada dzieci), cecha ma charakter cechy jakościowej dwudzielnej – i w tej sytuacji analiza ograniczy się do określenia proporcji osób posiadających dzieci w stosunku do osób, które dzieci nie posiadają – nie będziemy mogli wyliczyć średniej liczby dzieci.

W zależności od tego, na czym się koncentrujemy (jaki określimy cel badania) cecha, która w jednym badaniu jest cechą zmienną, w innym może być cechą stałą. Jeżeli ważne jest dla nas zbadanie zróżnicowania osób objętych ubezpieczeniem na życie ze względu na płeć, to wówczas płeć będzie zmienną jakościową dwudzielną, natomiast gdy badamy tylko jedną grupę, np. kobiety, wtedy płeć będzie cechą stałą rzeczoną⁷.

W tablicy 1.2 znajduje się zestawienie przykładowych populacji wraz z określeniem celu badania, dla którego zostały zdefiniowane, i przykładowymi cechami zmiennymi, pod kątem których były badane.

⁷ Więcej na temat cech stałych i cech zmiennych w: [Babbie 2005; King, Minium 2009; Francuz, Mackiewicz 2007; Makać, Urbanek-Krzysztofiak 2008; Szreder 2004].

Tablica 1.2. Przykładowe populacje związane z tematyką ubezpieczeń

Populacja	Jednostka	Cel badania	Zakres (cechy zmienne)
wszystkie kraje UE wg stanu na dzień 31.12.2019	jeden kraj	ocena europejskiego ryнку ubezpieczeń [Roczny Raport PIU 2017]	składka brutto wszystkich zakońdów ubezpieczeń w danym kraju w tys. euro; suma lokat wszystkich zakońdów ubezpieczeń w danym kraju w tys. euro
wszystkie zakłady ubezpieczeń w Polsce (Dział I i Dział II) w I połowie 2019 r.	jeden zakład ubezpieczeń	ocena polskiego ryнку ubezpieczeń [Raport o stanie sektora ubezpieczeń... 2019]	wysokość składki przypisanej brutto w tys. zł; wysokość przychodów z lokat w tys. zł; wysokość wypłaconych odszkodowań i świadczeń w tys. zł; wysokość poniesionych kosztów akwizycji w tys. zł
mieszkańcy wybranych obszarów województwa mazowieckiego w roku 2019	jeden mieszkaniec	jak do ochrony majątku podchodzą osoby mieszkające na terenach szczególnie zagrożonych żywiołami [Tarczyński 2019]	świadość zamieszkiwania w zagrożonym miejscu; posiadanie oszczędności na wypadek szkód pogodowych; posiadanie ubezpieczenia od ryzyka katastrof naturalnych; przyczyny braku ubezpieczenia

Źródło: Opracowanie własne.

Po zebraniu danych dysponujemy nieuporządkowanym zbiorem szczegółowych informacji opisujących poszczególne jednostki. W celu poznania występujących w rozkładach cech prawidłowości należy zbudować odpowiedni szereg lub wykres.

1.2. Szeregi i tablice statystyczne

W przypadku gdy zebrane dane wyłącznie uporządkujemy (bez grupowania) według wariantów analizowanej cechy zmiennej, uzyskamy tzw. **szereg szczegółowy**. Po uporządkowaniu i pogrupowaniu danych uzyskamy **szereg**

rozdzielczy⁸. Szereg rozdzielczy strukturalny powstanie, gdy dane pogrupujemy według wariantów cechy jakościowej, szereg rozdzielczy punktowy, gdy pogrupujemy ze względu na warianty cechy ilościowej skokowej o małej liczbie wariantów. Natomiast szereg rozdzielczy przedziałowy uzyskamy po pogrupowaniu danych według wariantów cechy ciągłej lub skokowej o dużej liczbie wariantów.

W tablicy 1.3 przedstawiono wykaz zakładów ubezpieczeń w 2017 r. według liczby prowadzonych grup ubezpieczeń. Dane uporządkowano według nazwy zakładu ubezpieczeń. Liczba grup ubezpieczeń jest cechą ilościową skokową. W tak zaprezentowanych danych nie jesteśmy w stanie zauważyć żadnych prawidłowości odnośnie do liczby prowadzonych grup ubezpieczeń, dlatego też zakłady należy pogrupować, czyli stosownie do przyjętego przez badacza kryterium podzielić na podgrupy⁹.

Tablica 1.3. Zakłady ubezpieczeń pozostałych osobowych i majątkowych według liczby grup prowadzonej działalności w 2017 r.

Ubezpieczyciel	Liczba grup ubezpieczeń
TUiR ALLIANZ POLSKA S.A.	15
AVIVA TU OGÓLNYCH S.A.	14
AXA UBEZPIECZENIA TUiR S.A.	14
COMPENSA TU S.A. Vienna Insurance Group	15
CONCORDIA POLSKA T UW	13
CREDIT AGRICOLE TU S.A.	8
T UW – CUPRUM	6
D.A.S. TU OCHRONY PRAWNEJ S.A.	1
STU ERGO HESTIA SA	17
TU EULER HERMES S.A.	4
TU EUROPA S.A.	13
GENERALI T.U. S.A.	16
GOTHAER TU S.A.	16
TU INTER POLSKA S.A.	12
INTERRISK TU S.A. Vienna Insurance Group	16
KUKE S.A.	2
LINK4 TU S.A.	11
T UW MEDICUM	12

⁸ Nazwa „szereg rozdzielczy” wyjaśnia zasady budowy szeregu – dane zostają w szeregu rozdzielone pomiędzy różne kategorie.

⁹ W przypadku małej ilości danych może wystarczyć uporządkowanie danych (np. rosnąco) według wariantów wybranej cechy zmiennej.

Tablica 1.3. cd.

Ubezpieczyciel	Liczba grup ubezpieczeń
NATIONALE-NEDERLANDEN TU S.A.	8
TUiR PARTNER S.A.	10
PKO TU S.A.	11
T.U.W. POCZTOWE	14
POLSKI GAZ TUW	13
TUW POLSKI ZAKŁAD UBEZPIECZEŃ WZAJEMNYCH	15
PTR S.A.	0
PZU SA	18
SALTUS TUW	7
SANTANDER AVIVA TU S.A.	7
SIGNAL IDUNA POLSKA TU S.A.	10
TUW TUW	13
TUZ TUW	13
UNIQA TU S.A.	18
TUiR WARTA S.A.	18
TU ZDROWIE S.A.	1

Źródło: [Rocznik rynku ubezpieczeń... 2017].

Po pogrupowaniu informacji znajdujących się w tablicy 1.3 (według cechy ilościowej skokowej: Liczba grup ubezpieczeń) otrzymamy szereg rozdzielczy punktowy (tab. 1.4). Działanie to umożliwia znalezienie prawidłowości w rozkładzie tej cechy. Najwięcej zakładów ubezpieczeń (5 zakładów) ma 13 grup ubezpieczeń. Najmniejsza liczba grup ubezpieczeń prowadzonych przez jeden zakład ubezpieczeń to 1, największa to 14 grup.

Dane w tablicy 1.4 można ze względu na dużą liczbę występujących wariantów cechy skokowej pogrupować w przedziały i zbudować tzw. szereg rozdzielczy przedziałowy. Jednak w wyniku tej procedury „zgubimy” niektóre informacje. Na przykład wiemy, że 11 zakładów ubezpieczeń prowadzi od 13 do 15 grup ubezpieczeń. Nie wiemy jednak dokładnie, ile zakładów ubezpieczeń ma 13, ile 14, a ile 15 grup (tab. 1.5). Większość jednostek skupia się wokół wyższych wartości badanej cechy, co w statystyce określamy asymetrią lewostronną. Przedział najliczniejszy to przedział od 13 do 15 grup ubezpieczeń.

Tablica 1.4. Rozkład liczby grup ubezpieczeń w zakładach ubezpieczeń pozostałych osobowych i majątkowych w 2017 r.

Liczba grup ubezpieczeń	Liczba zakładów ubezpieczeń
1	2
2	1
3	0
4	1
5	0
6	1
7	2
8	2
9	0
10	2
11	2
12	2
13	5
14	3
15	3
16	3
17	1
18	3
Suma	33

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z tablicy 1.3.

Tablica 1.5. Rozkład liczby grup ubezpieczeń w zakładach ubezpieczeń pozostałych osobowych i majątkowych w 2017 r.

Liczba grup ubezpieczeń (x_i)	Liczba zakładów ubezpieczeń (n_i)
1–3	3
4–6	2
7–9	4
10–12	6
13–15	11
16–18	7
Suma	33

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z tablicy 1.4.

Przyjrzyjmy się teraz zmiennej wiek, która ma znaczenie na przykład przy zakupie polisy OC. Młodzi kierowcy, ze względu na większą szkodowość, zapłacą często dużo wyższą składkę niż kierowca, który skończył przykładowo 25 lat. W przykładzie 1.1 wiek 120 ubezpieczonych został zapisany w postaci szeregu szczegółowego.

Przykład 1.1

Wiek w latach osób ubezpieczonych posiadających polisę OC w okresie od 1 do 15 lipca 2019 r. (dane umowne):

20,5; 21; 22; 24; 24; 24,5; 24,5; 25; 25; 25,5; 26,5; 26,5; 27,5; 28; 28; 28,5; 29; 29; 31; 31; 31; 32,5; 32,5; 33; 33; 33; 33,5; 34; 34; 34,5; 34,5; 34,5; 35; 36; 36; 36,5; 36,5; 37; 37; 37; 37; 37,5; 38; 38; 38; 38; 38,5; 39; 39; 40,5; 41; 41; 41; 42; 42; 42,5; 42,5; 43; 43; 43; 43; 43; 43,5; 43,5; 43,5; 44; 44; 44; 44; 44; 44; 44,5; 44,5; 45; 45; 45; 45,5; 45,5; 46; 46; 46; 47; 47; 47; 47,5; 47,5; 47,5; 48; 48; 48; 48; 48; 48,5; 48,5; 49; 49; 50; 50; 50; 50,5; 51; 51; 51; 51,5; 51,5; 52; 52; 52,5; 52,5; 52,5; 54; 55,5; 56; 56; 58; 58; 58,5; 58,5; 59.

Analizując powyższy szereg szczegółowy, możemy jedynie określić, że najmłodszy ubezpieczony był w wieku 20,5 lat, najstarszy w wieku 59 lat. Różnica w wieku pomiędzy najstarszym i najmłodszym ubezpieczonym wynosiła 38,5 lat. Ponieważ z takiego ciągu liczb nie możemy wyodrębnić prawidłowości, pogrupujemy dane w przedziały o rozpiętości 5 lat (tab. 1.6)¹⁰. W wyniku grupowania powstanie szereg rozdzielczy przedziałowy. Należy zwrócić uwagę, że ze względu na to, że wiek jest zmienną ciągłą, przedziały mogą zostać tak zapisane, że ich granice się pokrywają. Przy takim grupowaniu danych przyjmuje się, że przedziały są lewostronnie domknięte – osobę w wieku 25 lat przypiszemy do drugiego przedziału.

Najliczniejszym przedziałem wiekowym jest przedział 40–45 lat. Zróznicowanie rozkładu cechy wiek jest raczej niewielkie, na co wskazują małe różnice między liczebnościami przedziału najliczniejszego i bezpośrednio sąsiadujących. Punkt skupienia jednostek (40–45 lat) jest nieznacznie przesunięty w kierunku wyższych wartości wieku, taki rozkład jest nazywany rozkładem o asymetrii lewostronnej¹¹.

¹⁰ Zasady grupowania omówiono w: [Makać, Urbanek-Krzysztofiak 2008].

¹¹ Rozkłady mogą być symetryczne lub asymetryczne (o asymetrii lewostronnej bądź prawostronnej). Asymetria dotyczy sposobu rozmieszczenia liczebności przy wartościach cech. Przy jej ocenie należy zwracać uwagę na to, w którym miejscu rozkładu znajduje się dominanta, czyli wartość najczęściej występująca.

Tablica 1.6. Rozkład wieku osób ubezpieczonych posiadających polisę OC w okresie od 1 do 15 lipca 2019 r.

Wiek w latach	Liczba ubezpieczonych
20–25	7
25–30	11
30–35	14
35–40	18
40–45	26
45–50	21
50–55	15
55–60	8
Suma	120

Źródło: Opracowanie własne (dane umowne).

W przypadku grupowania zbiorowości według cechy jakościowej powstanie szereg rozdzielczy strukturalny. W tablicy 1.7 cechą zmienną jakościową jest rodzaj pokrewieństwa z osobą, po której przyznano rentę rodzinną. Największy odsetek (84,1%) dotyczy renty po współmałżonku.

Tablica 1.7. Struktura wypłaconych rent rodzinnych według pokrewieństwa z osobą, po której przyznano świadczenie w grudniu 2014 r.

Stopień pokrewieństwa	Udział rent rodzinnych (w %)
Po współmałżonku	84,1
Po rodzicu	12,6
Po pozostałych osobach	0,2
Po współmałżonku i po rodzicu	3,1
Po małżonku i po pozostałych osobach	0,0
Ogółem	100

Źródło: [Rocznik Statystyczny Ubezpieczeń Społecznych... 2016].

W tytułach niektórych tablic (tab. 1.4–1.6) użyliśmy sformułowania: rozkład. Z rozkładem cechy mamy do czynienia, gdy pogrupujemy dane według przyjętego założenia. **Rozkład cechy** przedstawia liczbę obserwacji (n_i) dla wszystkich możliwych wariantów lub wartości danych (wariantów cechy – x_i). Tego typu rozkład możemy utworzyć zarówno dla danych ilościowych, jak i jakościowych i możemy go przedstawić w formie szeregów, tablic lub wykresów.

Gdy szeregi rozdzielcze (strukturalny, punktowy, przedziałowy) opiszemy poprzez nadanie odpowiedniego numeru, zapisanie tytułu i źródła danych, powstanie **tablica**. W tytule tablicy jest określona zbiorowość, która była badana. Zwróćmy uwagę, że w przypadku tablicy 1.6, gdyby tytuł brzmiał: wiek osób ubezpieczonych, informacja ta byłaby niekompletna – czytelnik nie wiedziałby, o jakie konkretnie osoby chodzi oraz na jaki moment zostało przeprowadzone badanie. Pod tablicą mogą znajdować się odnośniki i uwagi. W celu prawidłowej interpretacji danych należy zwrócić uwagę, w jakich jednostkach zostały one zapisane oraz jakie jest źródło danych.

Tablica może mieć prostą postać, czyli przedstawiać rozkład jednej cechy, jak w tablicy 1.4, 1.5 lub 1.6. Może mieć również postać bardziej złożoną, w której dane pogrupowane są ze względu na dwie cechy lub więcej (tab. 1.8). Może składać się także z kilku szeregów dotyczących rozkładów tej samej cechy w różnych okresach lub w różnych zbiorowościach.

Tablica 1.8. Osoby ubezpieczone według liczby posiadanych polis i wysokości miesięcznego dochodu na osobę (badanie przeprowadzone w Polsce w okresie październik–grudzień w latach 2005–2007)

Dochód	Liczba polis		Razem
	1	2 lub więcej	
do 1000 zł	11	11	22
1001–2200	23	37	60
2201–4000	8	20	28
4001 lub więcej	1	6	7
Razem	43	74	117

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Wicka, Miedzik 2010].

1.3. Graficzna prezentacja danych

Dane przedstawione w postaci szeregu możemy również przedstawić w postaci wykresu, który dla wielu osób może być przystępniejszą formą prezentacji danych statystycznych. Pewne zagadnienia stają się łatwiejsze do zrozumienia, gdy mają formę graficzną.

Wykres jako metoda graficznej prezentacji danych jest dobrym narzędziem do przeprowadzenia wstępnej analizy rozkładu badanej cechy w zakresie m.in. wartości najczęściej występującej (dominanty), zróżnicowania i asymetrii. Na podstawie wykresu możemy również ocenić, czy w rozkładzie występują

wartości odstające¹² oraz czy występuje tylko jedno maksimum rozkładu¹³. Na wykresie przebieg zjawiska jest łatwiejszy do zaobserwowania w porównaniu z takimi samymi danymi przedstawionymi w postaci szeregu.

Rozróżniamy wykresy punktowe, liniowe, powierzchniowe, mapowe i inne. Wybór odpowiedniego wykresu zależy od rodzaju danych, jakie posiadamy, oraz od celu analizy. Wykres punktowy ma postać punktów, z których każdy prezentuje jedną obserwację (szereg szczegółowy) lub też określoną liczbę jednostek zbiorowości posiadających ten sam wariant cechy ilościowej¹⁴ (szereg rozdzielczy punktowy). Za pomocą wykresów liniowych przedstawimy zmianę zjawiska w czasie lub zaprezentujemy szereg rozdzielczy przedziałowy (krzywa liczebności). Wykresy powierzchniowe to wykresy, które mają postać figur płaskich (prostokąty, koła) i służą do pokazania wielkości i struktury badanych zbiorowości. Za pomocą wykresu mapowego zilustrujemy terytorialne rozmieszczenie danego zjawiska.

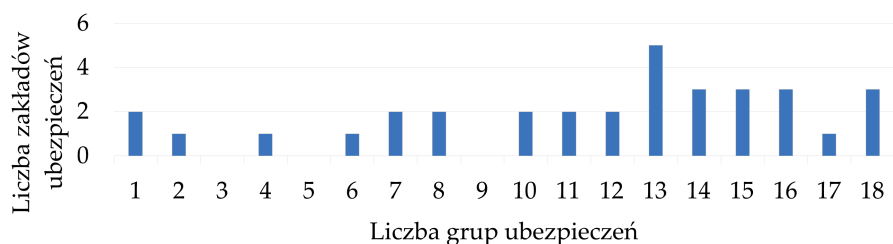
Każdy wykres należy zatytułować w jasny i zwięzły sposób z wykorzystaniem cech stałych i ewentualnie cechy zmiennej. U dołu wykresu należy podać źródło danych. W przypadku np. wykresów powierzchniowych musi być dołączona legenda do wykresu, która umożliwi jego zrozumienie. Na wykresach tworzonych w układzie współrzędnych należy pamiętać o podpisaniu osi, czyli wyjaśnieniu, co oznaczają dane. W przypadku tych wykresów trzeba również pamiętać o zastosowaniu na osiach odpowiedniej skali, czyli jednostek miary, w jakich prezentowane są dane. Ważne przy tym jest zachowanie proporcji wykresu, ponieważ zbyt wąska skala może wytworzyć wrażenie stosunkowo dużych zmian, natomiast zbyt szeroka – wrażenie relatywnie małych zmian.

Rysunek 1.1 przedstawia liczbę grup ubezpieczeń w zakładach ubezpieczeń pozostałych osobowych i majątkowych w roku 2017. Jest to wykres punktowy, który powstał na podstawie danych z tablicy 1.4. Wartości cechy 3, 5 oraz 9 nie wystąpiły w rozkładzie (por. tab. 1.4). Najwięcej zakładów ubezpieczeń prowadziło 13 grup ubezpieczeń (jest to dominanta).

¹² Wartości odstające to wartości o nietypowo niskich lub wysokich wartościach cechy ilościowej w badanej zbiorowości lub bardzo rzadkie warianty cechy jakościowej.

¹³ W sytuacji gdy pojawi się w rozkładzie więcej niż jedno maksimum, należy zastanowić się nad przyczyną i odpowiednio podzielić zbiór danych na grupy.

¹⁴ Dla większej czytelności punkty mogą być połączone z wartościami cechy (na osi poziomej) za pomocą prostych lub słupków.



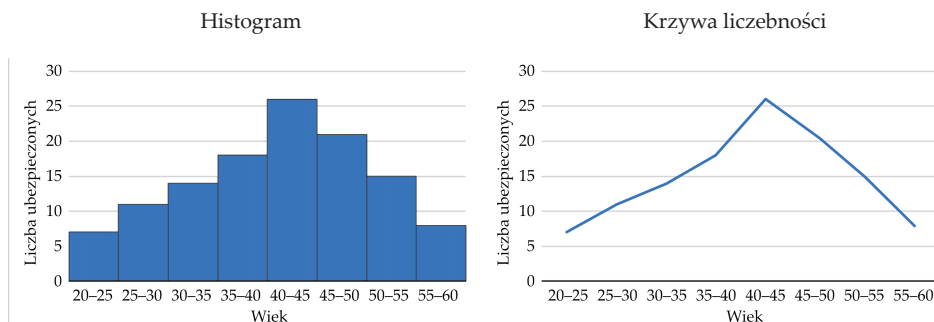
Rysunek 1.1. Liczba grup ubezpieczeń w zakładach ubezpieczeń pozostałych osobowych i majątkowych w 2017 r.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie tablicy 1.4.

Dla zobrazowania rozkładu cechy ilościowej ciągłej posłużymy się histogramem oraz krzywą liczebności (rys. 1.2). Histogram zbudowany został na podstawie danych z tablicy 1.6. Na osi poziomej histogramu naniesione są przedziały odpowiadające zakresowi wartości (co 5 lat)¹⁵. Pola prostokątów są proporcjonalne do liczebności przedziałów. Pole całego histogramu odzwierciedla liczebność całej zbiorowości. Kształt histogramu (rys. 1.2, lewa strona) pokazuje, że rozkład wieku charakteryzuje się niewielką asymetrią lewostronną – lewe ramię histogramu jest dłuższe, większość jednostek (osób ubezpieczonych) koncentruje się przy większych wartościach cechy. Rozkład posiada jedno maksimum – w przedziale 40–45 lat, czyli jest rozkładem jedno-modalnym. Krzywa liczebności (rys. 1.2, prawa strona) powstała z połączenia punktów odpowiadających współrzędnym środka przedziału i liczebności tego przedziału.

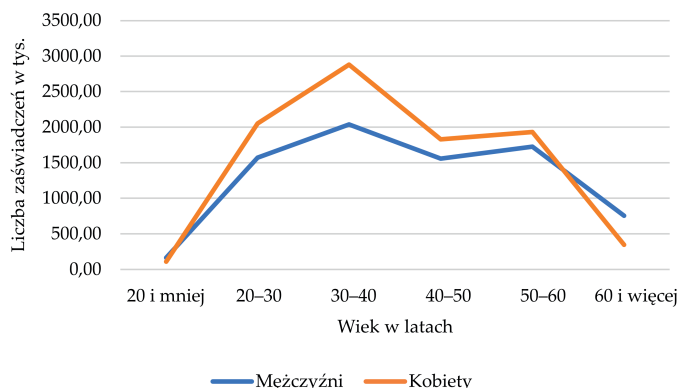
Krzywe liczebności warto wykorzystać w sytuacji, gdy chcemy porównać ze sobą kilka rozkładów na jednym wykresie. Rysunek 1.3 pokazuje liczbę zaświadczeń lekarskich z tytułu choroby, które zostały wystawione dla kobiet i dla mężczyzn w wyodrębnionych grupach wieku. W grupie świadczeniobiorców w wieku 20 lat i mniej liczba zaświadczeń lekarskich wystawionych dla mężczyzn minimalnie przewyższała liczbę zaświadczeń dla kobiet. Natomiast w przypadku starszych świadczeniobiorców (aż do osiągnięcia przez nich około 60 lat, czyli okresu, gdy kobieta ma prawo przejść na emeryturę) liczba wystawionych świadczeń dla kobiet była zdecydowanie wyższa niż dla mężczyzn (największa różnica jest w przedziale wieku świadczeniobiorców 30–40 lat).

¹⁵ Więcej na temat zasad grupowania w: [Makać, Urbanek-Krzystofiak 2008].



Rysunek 1.2. Rozkład wieku osób ubezpieczonych posiadających polisę OC w okresie od 1 do 15 lipca 2019 r.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie przykładu 1.1.

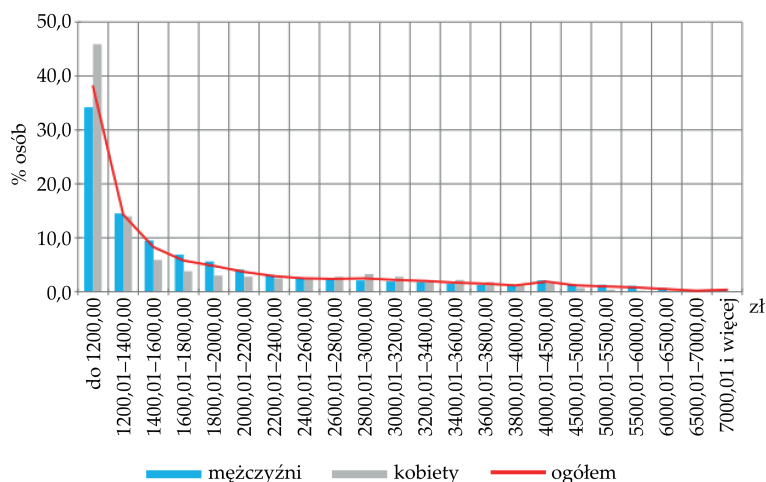


Rysunek 1.3. Zaświadczenia lekarskie z tytułu choroby własnej wydane osobom ubezpieczonym w ZUS w 2014 r. według grup wieku ubezpieczonych

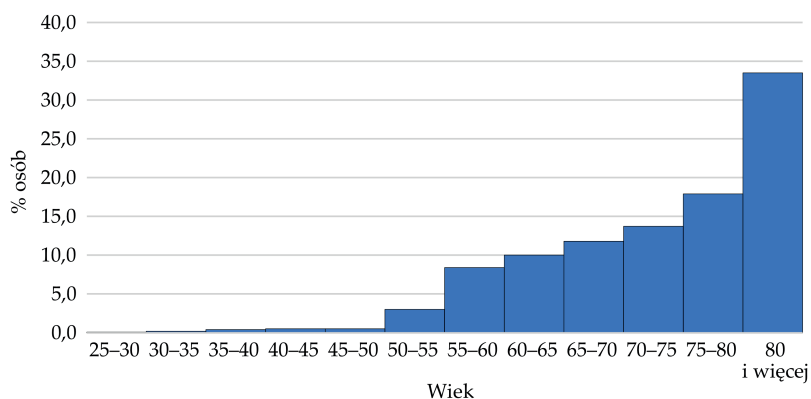
Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Rocznik Statystyczny Ubezpieczeń społecznych... 2016].

Rysunek 1.2 przedstawia rozkład wieku charakteryzujący się niewielką asymetrią lewostronną. Również rozkłady na rysunku 1.3 mają umiarkowaną asymetrię. Natomiast dwa kolejne wykresy pokazują rozkłady o skrajnej asymetrii. Na rysunku 1.4 rozkład charakteryzuje się skrajną asymetrią prawostronną – najliczniejsza wartość (dominanta) znajduje się na początku wykresu, „ogon” wykresu ciągnie się w prawo¹⁶. Natomiast przedstawiony na rysunku 1.5 rozkład cechy charakteryzuje się skrajną asymetrią lewostronną.

¹⁶ Asymetria dotyczy sposobu rozmieszczenia liczebności przy wartości cechy. Zwróćmy uwagę, że najliczniejszy przedział na wykresie 1.4 znajduje się na samym początku



Rysunek 1.4. Struktura rencistów¹⁷, którym renty z tytułu niezdolności do pracy wypłaca ZUS według wysokości świadczeń i płci świadczeniobiorców w marcu 2019 r.
Źródło: [Struktura wysokości świadczeń wypłacanych przez ZUS... 2019, s. 16].



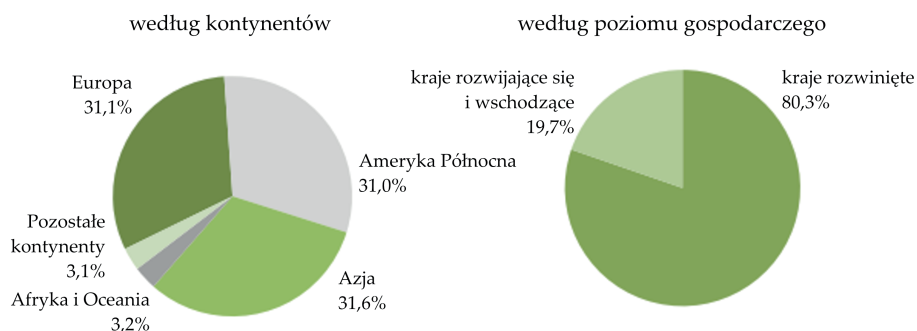
Rysunek 1.5. Struktura osób uprawnionych do renty rodzinnej po małżonku wypłaconych w grudniu 2014 r. według wieku

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Rocznik Statystyczny Ubezpieczeń Społecznych... 2016].

rozkładu, czyli największy odsetek rencistów (dotyczy to zarówno kobiet, jak i mężczyzn) otrzymuje najniższą rentę – do 1200 zł. Im wyższy poziom renty, tym mniejszy odsetek rencistów otrzymuje rentę w tej wysokości. Są renciści, których miesięczna wysokość renty jest na poziomie około 7000 zł.

¹⁷ Rozkład można też przedstawić, zastępując liczebności wskaźnikami struktury, co nie wpłynie na kształt wykresu.

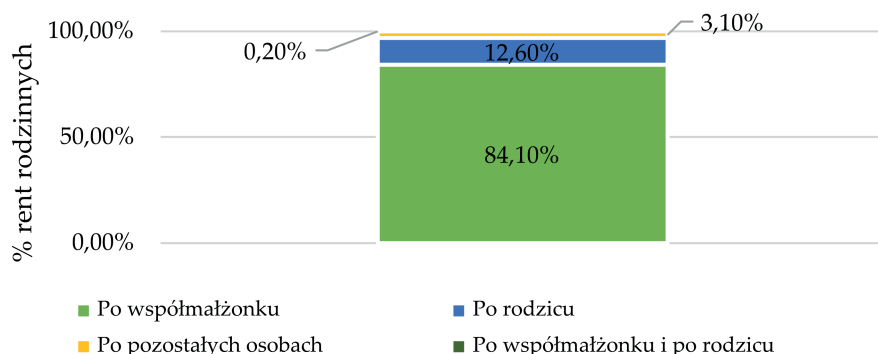
Cechy jakościowe przedstawiane są najczęściej na wykresach kołowych (rys. 1.6) oraz prostokątnych (rys. 1.7). W przypadku wykresów kołowych możemy przedstawić dane procentowe (wszystkie kategorie łącznie muszą dać 100%). Gdy mamy do czynienia z wieloma kategoriami, wykresy kołowe są mało czytelne. W przypadku wykresów kołowych kłopotliwa staje się również analiza porównawcza. Dlatego w takiej sytuacji lepiej wykorzystać wykresy prostokątne (por. rys. 1.8).



Uwaga: Europa obejmuje Europę Zachodnią oraz Europę Środkową i Wschodnią, łącznie z Rosją, Ukrainą i Turcją.

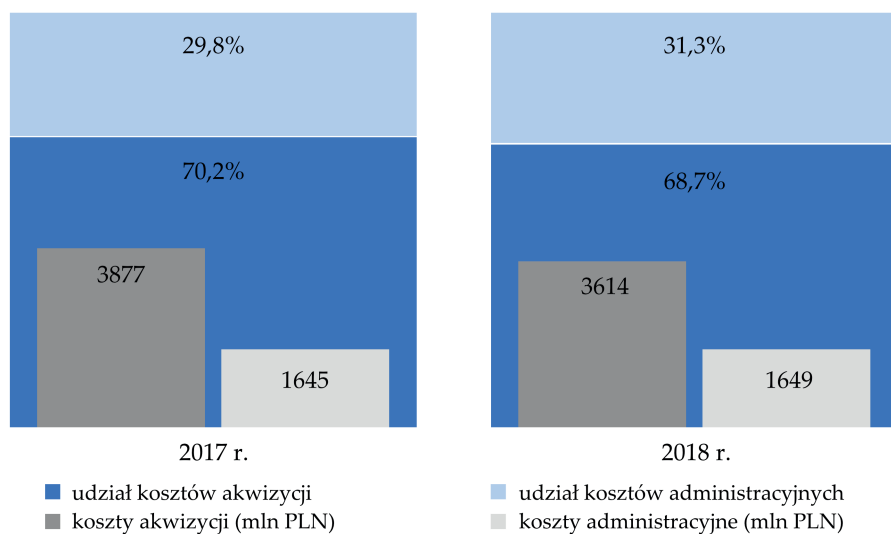
Rysunek 1.6. Struktura składki brutto na świecie w 2016 r. według kontynentów i poziomu gospodarczego

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: [Polski rynek ubezpieczeniowy 2017, s. 10].



Rysunek 1.7. Struktura wypłaconych rent rodzinnych według pokrewieństwa z osobą, po której przyznano świadczenie w grudniu 2014 r.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie tablicy 1.7.



Rysunek 1.8. Koszty działalności ubezpieczeniowej Działu II w Polsce w mln zł i ich struktura w % w latach 2017–2018

Źródło: [Raport roczny 2018 2019, s. 66].

Warto zwrócić uwagę, że na rysunku 1.8 mamy do czynienia z połączeniem wykresów z różnymi jednostkami miar: niebieskie prostokąty prezentują strukturę kosztów w %, a szare prostokąty wartość kosztów w mln zł.

Procedury statystyczne stosowane są najczęściej w odniesieniu do dużych zbiorów danych. Sprezycowanie zbiorowości, która podlega badaniu poprzez określenie jej cech stałych, jest kluczowe w procesie badawczym. Podczas przeprowadzania badania analizowane są zmienne, czyli cechy, które mogą przyjmować różne wartości. Gdy obserwacje uporządkujemy i pogrupujemy, łatwiej jest zrozumieć znaczenie uzyskanych w procesie badawczym danych, a prezentacja graficzna w postaci wykresów ułatwi zauważenie pewnych cech i tendencji dla nich charakterystycznych.

Po lekturze rozdziału Czytelnik powinien znać:

- pojęcia: zbiorowość statystyczna i jednostka w zagadnieniach ubezpieczeniowych, rodzaje cech,
- klasyfikacje cech statystycznych,
- rodzaje szeregów statystycznych,
- rodzaje wykresów,
- sposoby prezentacji danych.

Pytania sprawdzające

1. Jakie zbiorowości statystyczne można wyodrębnić, analizując rynek ubezpieczeń?
2. Co określają cechy stałe?
3. Dlaczego ważne jest precyzyjne określenie zbiorowości statystycznej?
4. Co to są cechy zmienne?
5. Jakie przykładowo cechy zmienne mogą być analizowane przez zakład ubezpieczeń?
6. Jakie są rodzaje szeregów statystycznych?
7. Jaka jest różnica między szeregiem statystycznym a tablicą?
8. Jakie wykresy służą do przedstawienia rozkładu cechy jakościowej?
9. W jakich sytuacjach nie powinien być stosowany wykres kołowy?

Rozdział 2

Statystyczne miary opisu rozkładów cech ubezpieczeniowych

Dorota Banaszkiewicz

Hasła: tendencja centralna, dyspersja, asymetria, parametry klasyczne, parametry pozycyjne, średnia arytmetyczna, kwantyle, mediana, dominanta, odchylenie standardowe, współczynnik zmienności, moment trzeci centralny, rozstęp, odchylenie ćwiartkowe, wskaźnik struktury, wskaźnik podobieństwa struktur, wskaźnik natężenia

2.1. Statystyczne miary opisujące rozkłady cech

Analiza danych przeprowadzana przez zakład ubezpieczeń (ubezpieczyciela) powinna prowadzić do uzyskania przejrzystego, a zarazem zwięzłego opisu badanej zbiorowości statystycznej. W zakresie zainteresowań ubezpieczyciela, jak również organów nadzoru, pojawia się wiele problemów badawczych, takich jak: ile wynosi przeciętna wysokość odszkodowań i świadczeń wypłacanych klientom, jaka wysokość składki przypisanej brutto dominuje wśród zakładów, czy większość zakładów ponosi wysokie czy niskie koszty działalności ubezpieczeniowej itp. Klient zakładu ubezpieczeń chciałby z kolei wiedzieć, który zakład oferuje najlepsze warunki ubezpieczeniowe czy też zapewnia najszybszą wypłatę odszkodowania.

Wykresy statystyczne stanowią jedną z metod prezentacji danych statystycznych – za pomocą kształtu, wielkości lub barwy prezentują informacje liczbowe. Mogą być wykorzystywane również na potrzeby analizy danych, ukazują rozkład badanej cechy oraz prawidłowości w przebiegu zjawisk¹⁸. Podstawą analizy statystycznej jest opis liczbowy, wyznaczenie charakterystyk – **parametrów statystycznych** – opisujących występujące w zbiorowości

¹⁸ Szerzej na ten temat w: [Graficzna prezentacja danych statystycznych... 2014].

prawidłowości. Ich wyznaczenie prowadzi do określenia trzech podstawowych własności rozkładu¹⁹:

- 1) tendencji centralnej – czyli przeciętnego poziomu wartości badanej cechy,
- 2) dyspersji – czyli zróżnicowania wartości cechy w zbiorowości,
- 3) asymetrii – tj. położenia miejsca skupienia jednostek względem wartości średniej.

Analizę struktury, czyli wewnętrznej budowy interesującej nas zbiorowości, możemy przeprowadzić za pomocą **parametrów klasycznych**, obliczanych ze wszystkich obserwacji, lub **parametrów pozycyjnych**, wyznaczanych na podstawie częstości występowania lub miejsca jednostki w szeregu²⁰. Zastosowanie miar klasycznych wymaga spełnienia pewnych warunków, dotyczących głównie własności rozkładu. Stosujemy je, gdy badany rozkład posiada tendencję centralną, czyli nie jest skrajnie asymetryczny (najwięcej jest jednostek o najmniejszych lub największych wartościach), nie jest wielomodalny (posiadający dwa lub więcej punktów skupienia), nie jest siodłowy (najwięcej jest najmniejszych i największych wartości, a najmniej środkowych), jest równomierny (wszystkie wartości występują tak samo często). Miar klasycznych nie stosujemy, gdy występują wartości odstające. Stosowanie miar klasycznych uniemożliwiają otwarte przedziały w szeregach rozdzielczych.

Ocenę struktury interesującego nas zjawiska rozpoczynamy od określenia przeciętnego poziomu cechy, np. wysokości składki w ubezpieczeniu komunikacyjnym OC, wysokości wypłaconego odszkodowania, wieku ubezpieczających się itp. Następuje uogólnienie wartości cechy zaobserwowanej u poszczególnych jednostek badanej zbiorowości w jedną charakterystykę liczbową. Wartość ta dobrze odzwierciedla poziom przeciętny, pod warunkiem że znajduje się w centrum rozkładu i ponadto jest licznie reprezentowana²¹. Mówimy, że rozkład posiada tendencję centralną. Może to być średni poziom badanej cechy (średnia arytmetyczna), wartość najczęściej występująca (dominanta) czy też wartość środkowa (mediana) [Cieciura, Zacharski 2011].

¹⁹ Por. bogatą literaturę przedmiotu, m.in. [Aczel 2017; Makać, Urbanek-Krzysztofiak 2008; Koronacki, Mielniczuk 2009; Ostasiewicz, Rusnak, Siedlecka 2006; Kot, Jakubowski, Sokołowski 2011].

²⁰ Parametry pozycyjne są również traktowane jako uzupełnienie miar klasycznych do oceny tendencji centralnej, gdyż wnoszą dodatkowe informacje, opisują rozkład w środkowej części.

²¹ Sytuacja taka nie występuje, gdy rozkład jest siodłowy lub skrajnie asymetryczny i wartość centralna jest małoliczna (występuje brak tendencji centralnej).

Średnia arytmetyczna jest klasyczną miarą tendencji centralnej. Z definicji jest sumą wartości cechy wszystkich jednostek podzieloną przez ich łączną liczbę²². Przy wyborze średniej arytmetycznej do opisu poziomu przeciętnego należy mieć na uwadze wszystkie wyżej wspomniane ograniczenia stosowania miar klasycznych. **Mediana**, pozycyjna miara poziomu przeciętnego, wskazuje na wartość środkową. Mediana ma nikłą wartość poznawczą w przypadku bardzo małych liczebności. Im większa liczba obserwacji, tym bardziej zasadne jest obliczanie nie tylko mediany, ale również innych **kwantyli**²³: **kwartyli** (dzielących zbiorowość na cztery równe liczebnie części po 25% obserwacji w każdej z nich), **decyli** (dzielących zbiorowość na dziesięć równych liczebnie części po 10% obserwacji w każdej z nich) czy **percentyli** (dzielących zbiorowość na sto równych liczebnie części po 1% obserwacji w każdej z nich). W analizie zazwyczaj skupiamy się na ocenie 1%, 5%, 10% czy 25% największych i najmniejszych wartości badanej cechy, np. wartości wypłacanych odszkodowań. **Dominanta** to w przypadku cechy ilościowej skokowej wartość najliczniej występująca w rozkładzie. Dominantę interpretuje się jako wartość typową w badanej zbiorowości.

Miara poziomu przeciętnego sprowadza wartości badanej cechy zmiennej do jednej wielkości liczbowej. Wartości poszczególnych jednostek różnią się między sobą, bardziej lub mniej różnią się również od średniej arytmetycznej. Są wyższe i niższe wysokości ubezpieczenia, odszkodowania, sumy ubezpieczenia itp. Przykładowo, dwóch ubezpieczycieli może mieć wysokość wypłacanych odszkodowań z tytułu ubezpieczeń komunikacyjnych OC przeciętnie na takim samym poziomie. U jednego z nich kwoty wypłacanych odszkodowań nieznacznie różnią się od poziomu średniego, u drugiego natomiast występuje duże zróżnicowanie. Przy niskim relatywnie przeciętnym poziomie odszkodowań duże zróżnicowanie oznacza, że ubezpieczyciel wypłacił zarówno niskie odszkodowania (co jest korzystne dla ubezpieczyciela), ale również bardzo wysokie odszkodowania²⁴ (co jest dużym ryzykiem²⁵). Jeżeli średnia jest na

²² W szeregu rozdziałach, gdzie zbiorowość została pogrupowana w klasy ujęte w przedziały, kolejnym wariantom cechy odpowiada pewna liczba jednostek; w takim przypadku do oceny poziomu przeciętnego wykorzystujemy formułę średniej arytmetycznej ważonej, gdzie częstość występowania poszczególnych wartości cechy nadaje znaczenie (wagę) tym wartościom; szerzej na ten temat w: [Makać, Urbanek-Krzysztofiać 2008].

²³ Kwantylem nazywa się wartość w rozkładzie cechy zmiennej dzielącą zbiorowość na dowolną liczbę równolicznych części.

²⁴ Suma gwarancyjna w ubezpieczeniu OC komunikacyjnym wynosi 1 mln euro za szkody majątkowe i 5 mln euro za szkody osobowe w jednym zdarzeniu.

²⁵ Jest to tzw. problem „grubych ogonów” w rozkładach wartości odszkodowań. Możliwość występowania rzadkich bardzo wysokich odszkodowań musi być uwzględniona

relatywnie wysokim poziomie i jednocześnie występuje silne zróżnicowanie, to oznacza, że większość odszkodowań jest wysoka i występują nieliczne niskie odszkodowania. Taka informacja dla zakładu ubezpieczeń może być ważna, ponieważ koszt likwidacji odszkodowań i tych niskich, i tych wysokich jest porównywalny. W takiej sytuacji zakład ubezpieczeń może w niektórych rodzajach ubezpieczeń rozważyć wprowadzenie franszyzy integralnej. Interesuje nas przede wszystkim przeciętne odchylenie od poziomu średniego. Informują o tym miary **dyspersji** (zmienności, rozproszenia, zróżnicowania). Odchylenia możemy wyrażać w jednostkach pomiaru (**miary absolutne**) lub w odniesieniu do wartości przeciętnej (**miary względne**).

Podstawową klasyczną absolutną miarą dyspersji jest **wariancja**, która ze względu na jednostkę pomiaru wyrażoną jako kwadrat nie posiada interpretacji. Pierwiastek kwadratowy z wariancji to **odchylenie standardowe** informujące, o ile przeciętnie wartości badanej cechy odchylają się od średniej arytmetycznej. Przeciętne odchylenie od poziomu średniego odszkodowania wynoszące np. 500 zł zostanie inaczej ocenione w ubezpieczeniu danego typu, w którym średnie odszkodowanie wynosi 2000 zł, a inaczej gdy średnio wynosi 4000 zł. W celu dokonania oceny natężenia dyspersji posługujemy się **współczynnikiem zmienności**, czyli wyrażamy odchylenie standardowe jako procent wartości średniej arytmetycznej. W pierwszym przypadku odchylenie wynoszące 500 zł stanowi 25% średniej, w drugim 12,5% i informuje o znacznie mniejszym natężeniu dyspersji odszkodowań. Współczynniki zmienności odgrywają szczególną rolę w analizie porównawczej, zwłaszcza gdy pomiar dokonany jest w różnych jednostkach (np. w zł i w euro) lub kształtuje się na różnym poziomie (dochody małych firm i dochody dużych firm).

Zbiorowości charakteryzujące się zbliżonym poziomem przeciętnym cechy i zbliżonym poziomem zróżnicowania mogą zostać różnie ocenione po uwzględnieniu dodatkowej informacji o tym, czy większość jednostek przyjmuje wartości powyżej czy poniżej poziomu przeciętnego. Przykładowo u dwóch ubezpieczycieli zarówno przeciętny poziom, jak i zróżnicowanie składek w danym typie ubezpieczenia są na zbliżonym poziomie. W jednym produkcie ubezpieczeniowym większość ubezpieczonych ma wiek powyżej poziomu przeciętnego, a w drugim większość ma wiek poniżej poziomu przeciętnego. Może to być efektem różnej konstrukcji produktów ukierunkowanej do klientów z różnych grup wiekowych (do osób młodych lub emerytów). Analiza tylko poziomu średniego i zróżnicowania nie pokaże różnic w rozkładzie wieku ubezpieczonych. O tym, po której stronie poziomu przeciętnego znajduje się

w kalkulacji składki oraz w wysokości rezerw techniczno-ubebezpieczeniowych.

większość wartości, informują miary asymetrii²⁶. Z klasycznych miar asymetrii najważniejszy jest **moment trzeci centralny względny**, który informuje zarówno o kierunku, jak i o sile asymetrii. Znak współczynnika informuje o kierunku asymetrii (wartości dodatnie – asymetria dodatnia, inaczej prawostronna; wartości ujemne – asymetria ujemna, inaczej lewostronna). Wartość bezwzględna wyniku informuje o natężeniu asymetrii. Im wartości bardziej odbiegają od zera, tym natężenie asymetrii jest większe, wartości powyżej 2 i poniżej –2 świadczą o skrajnej asymetrii. Miary pozycyjne asymetrii informują o kierunku i natężeniu asymetrii w środkowej części rozkładu obejmującej 50% bądź 80% jednostek w zależności, czy wskaźnik asymetrii został wyliczony odpowiednio o kwartyle czy decyle. Miary klasyczne i pozycyjne wykorzystywane do opisu poszczególnych własności rozkładu prezentuje tablica 2.1²⁷.

Tablica 2.1. Parametry opisujące strukturę zbiorowości statystycznej

Własność rozkładu	Parametry klasyczne	Parametry pozycyjne
tendencja centralna	średnia arytmetyczna	kwantyle, w tym: mediana, kwantyle, percentyle dominanta
dyspersja	odchylenie standardowe, współczynnik zmienności	rozstęp (obszar zmienności), rozstępy kwantylowe, odchylenia kwantylowe, współczynniki zmienności (kwantylowe)
asymetria	moment trzeci względny	współczynnik asymetrii (kwantylowy)

Źródło: Opracowanie własne.

²⁶ Typ rozkładu możemy określić również na podstawie szeregu rozdzielczego, jak i wykresu: obserwacje rozłożone równomiernie po obu stronach środka rozkładu wskazują na rozkład symetryczny (tyle samo wartości jest zarówno powyżej, jak i poniżej średniej arytmetycznej). Jeżeli większość jednostek skupia się przy niższych wartościach cechy, badany rozkład jest rozkładem asymetrycznym prawostronnym (większość wartości jest poniżej średniej arytmetycznej). Natomiast jeżeli jednostki skupiają się przy wyższych wartościach cechy, rozkład jest lewostronnie asymetryczny (większość wartości jest powyżej średniej arytmetycznej). W sytuacji gdy jednostki zbiorowości skupiają się przy krańcowych wartościach rozkładu badany rozkład jest skrajnie asymetryczny. Więcej na ten temat w: [Makać 2003; Malinowski 2004].

²⁷ Klasyfikacja parametrów statystycznych oraz metody ich doboru omówione są szeroko w literaturze przedmiotu, m.in. w: [Wieczorkowska, Wierzbiński 2007; Makać, Urbanek-Krzysztofiak 2008; Aczel 2017; Malinowski 2004].

Kiedy zatem średnia arytmetyczna dobrze opisuje poziom przeciętny badanej zbiorowości? Czy zawsze do analizy struktury należy wykorzystywać miary klasyczne i pozycyjne? Spróbujmy znaleźć odpowiedź na tak postawione pytania, analizując poniższe przykłady.

2.2. Analiza rozkładu liczby szkód

Sposób przeprowadzenia analizy statystycznej zależy od rodzaju badanej cechy (skokowa czy ciągła), rodzaju materiału statystycznego (w formie danych szczegółowych czy w formie szeregów rozdzielczych), własności rozkładu (tendencja centralna lub jej brak, występowanie wartości odstających). Przypomnijmy, że takie cechy, jak liczba szkód, liczba zawieranych polis czy liczba wypłaconych odszkodowań mają charakter skokowy, a wiek kierowców, koszty działalności ubezpieczeniowej czy wysokość składki mają charakter ciągły. Jeżeli dysponujemy indywidualnymi danymi o każdej jednostce, czyli posiadamy dane szczegółowe, obecnie do wyliczenia wartości parametrów wykorzystujemy gotowe funkcje statystyczne, np. w Excelu. I takie rozwiązanie zostanie przedstawione. Natomiast gdy posiadany materiał statystyczny ma postać szeregu rozdzielczego, wartości parametrów szacujemy, wykorzystując odpowiednie wzory.

Przykład 2.1

Tablica 1.3 (patrz rozdział 1) zawiera dane dotyczące liczby grup ubezpieczeń prowadzonych przez zakłady ubezpieczeń pozostałych osobowych i majątkowych w Polsce w 2017 r. Po ich uporządkowaniu otrzymaliśmy szereg szczegółowy, a po uporządkowaniu i pogrupowaniu danych szereg rozdzielczy punktowy (tab. 1.4). Pogrupowanie pozwoliło na określenie własności rozkładu. Jest on jednomodalny, zbliżony do symetrycznego oraz brak jest wartości nietypowych. Pozwala to na zastosowanie miar klasycznych. Do opisu własności rozkładu wykorzystano również miary pozycyjne. Uzyskane wyniki zestawiono w tablicy 2.2.

Tablica 2.2. Parametry i ich wartości w rozkładzie liczby grup ubezpieczeń pozostałych osobowych i majątkowych w zakładach ubezpieczeń w Polsce w 2017 r.

Własność rozkładu	Parametry klasyczne	Parametry pozycyjne
tendencja centralna	średnia arytmetyczna = 11,5 grup	minimum = 1 grupa maksimum = 18 grup mediana = 13 grup kwartył 1 = 8 grup kwartył 3 = 15 grup dominanta = 13 grup
dyspersja	wariancja = 22,75 grup ² odchylenie standardowe = 4,77 grupy współczynnik zmienności = 41,35%	rozstęp = 17 grup rozstęp kwartyłowy = 7 grup odchylenie kwartyłowe = 3,5 grupy współczynnik zmienności kwartyłowej = 26,92%
asymetria	moment trzeci względny = - 0,75	współczynnik asymetrii kwartyłowy = - 0,43

Źródło: Opracowanie własne na podstawie tablicy 1.3.

Liczba grup ubezpieczeń pozostałych osobowych i majątkowych w 2017 r. wynosiła od 1 do 18. Przeciętnie na jednego ubezpieczyciela przypadało około 12 grup, 25% ubezpieczycieli miało w swojej ofercie co najwyżej 8 grup, połowa co najmniej 13 grup i 25% nie mniej niż 15 grup. Najwięcej ubezpieczycieli miało 13 grup badanych ubezpieczeń. Liczba oferowanych grup ubezpieczeń odchyłała się przeciętnie od ich średniej liczby 4,77 grupy, tj. o 41,35%. Natężenie dyspersji było umiarkowane. Większość ubezpieczycieli oferowała więcej grup ubezpieczeń w porównaniu z poziomem przeciętnym, a natężenie asymetrii było znaczne. W środkowej części obejmującej 50% ubezpieczycieli zarówno natężenie dyspersji, jak i asymetrii było mniejsze niż u ogółu badanych. Kierunek asymetrii był taki sam.

Analiza uzyskanych wyników potwierdza słuszność zastosowania miar klasycznych. Zbliżona wartość miar średnich potwierdza występowanie tendencji centralnej, dowodzi również umiarkowanego zróżnicowania i niewysokiego natężenia asymetrii. Należy zaznaczyć, że te same wartości parametrów uzyskamy na podstawie szczegółowych danych oraz w postaci szeregu rozdzielczego punktowego.

Jakie parametry i dlaczego należy wykorzystać do analizy rozkładu charakteryzującego się bardzo silną czy skrajną asymetrią?

Przykład 2.2

W tablicy 2.3 przedstawiono dane dotyczące ubezpieczeń komunikacyjnych, opublikowane w „Journal of Statistical Actuaries”.

Tablica 2.3. Rozkład liczby roszczeń przypadających na jedną polisę w ciągu roku

Liczba roszczeń	Liczba polis	Szereg liczebności skumulowanych	Udział polis o danej liczbie roszczeń w ogólnej liczbie polis (w %)
0	370 412	370 412	87,934
1	46 545	416 957	11,049
2	3 935	420 892	0,934
3	317	421 209	0,075
4	28	421 237	0,007
5	3	421 240	0,001
Suma	421 240	x	100,000

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: [Johnson, Hey, 1971]

Z przedstawionych danych wynika, że z większości polis (blisko 88%) w ogóle nie zgłoszono roszczeń (dominanta = 0 zgłoszeń), z 11% polis zgłoszono roszczenie tylko raz, więcej niż jedno roszczenie w ramach jednej polisy występowało bardzo rzadko (1% wszystkich przypadków). Rozkład liczby roszczeń wykazuje w tym przypadku skrajną asymetrię prawostronną. Zastosowanie miar klasycznych do opisu rozkładu dało następujące wyniki: średnia liczba roszczeń była bliska 0 (średnia arytmetyczna = 0,13), liczba roszczeń odchyłała się od poziomu średniego przeciętnie o 0,37 zgłoszenia (odchylenie standardowe = 0,37), co świadczy o bardzo silnym natężeniu zróżnicowania (współczynnik zmienności = 282,5%), potwierdziło również występowanie skrajnej asymetrii prawostronnej świadczącej o zdecydowanej przewadze liczby polis poniżej poziomu przeciętnego (moment trzeci względny = 2,825). Odpowiednimi miarami do opisu oceny przeciętnej liczby roszczeń będą miary pozycyjne.

Tablica 2.4. Wartości pozycyjnych parametrów liczby roszczeń przypadających na jedną polisę

Pozycja parametru	Wartość parametru
pozycja mediany = 210 620	mediana = 0 roszczeń
pozycja percentyla 1 = 4 212	percentyl 1 = 0 roszczeń
pozycja percentyla 10 = 42 124	percentyl 10 = 0 roszczeń
pozycja kwartyla 1 = 105 310	kwartyl 1 = 0 roszczeń
pozycja kwartyla 3 = 315 930	kwartyl 3 = 0 roszczeń
pozycja percentyla 90 = 379 116	percentyl 90 = 1 roszczenie
pozycja percentyla 99 = 417 027	percentyl 99 = 2 roszczenia
	dominanta = 0 roszczeń
	rozstęp = 5 roszczeń
	odchylenie ćwiartkowe = 0 roszczeń
	współczynnik zmienności oparty
	o kwartyle = 0 roszczeń
	współczynnik skośności oparty o kwartyle
	= 0 roszczeń

Źródło: Opracowanie własne na podstawie tablicy 2.3.

Ponieważ około 88% polis znajduje się w pierwszej klasie szeregu, wszystkie miary położenia do percentyla 87 włącznie przyjmują wartość 0. W środkowej części obejmującej 50% polis brak zróżnicowania. Do opisu własności przedstawionego rozkładu wystarczy zatem wartość dominanty i stwierdzenie, że występuje skrajna asymetria.

2.3. Analiza rozkładu wysokości składki przypisanej brutto

Niektóre ze zmiennych związanych z działalnością zakładów ubezpieczeń i ich klientów to cechy o charakterze ciągłym: wysokość składki ubezpieczeniowej, wysokość odszkodowań i świadczeń, koszty działalności ubezpieczycieli, wysokość lokat, rezerw itp. Jeżeli badana zbiorowość jest mało liczna lub posiadamy szczegółowe dane, procedura analizy statystycznej jest podobna do oceny rozkładu cechy skokowej.

Przykład 2.3

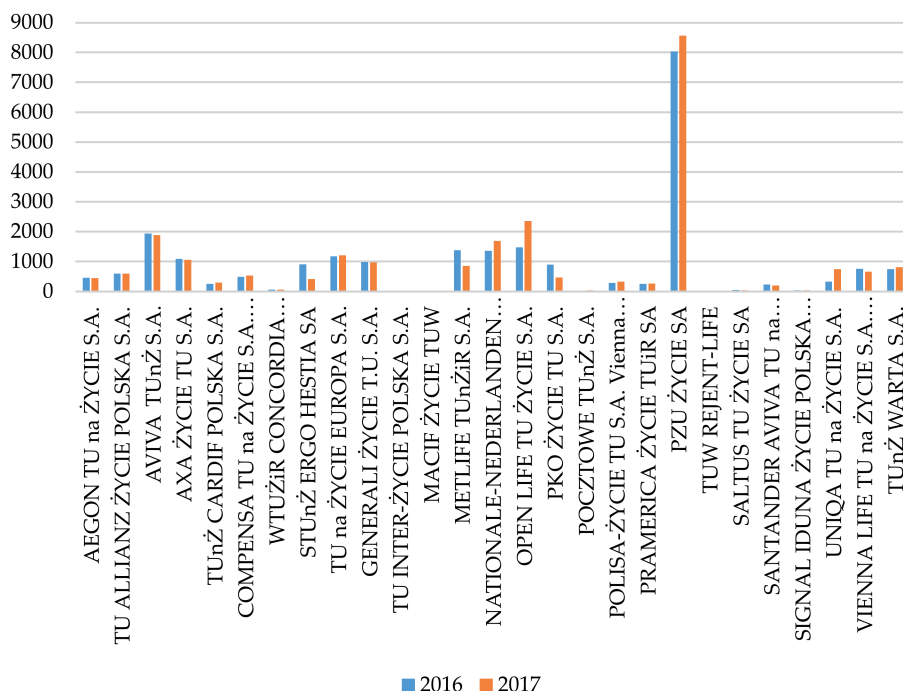
PIU w swoich raportach rocznych publikuje m.in. informacje dotyczące wysokości składki przypisanej brutto w ciągu roku (tab. 2.5).

Tablica 2.5. Składka przypisana brutto zakładów ubezpieczeń na życie w latach 2016–2017

Zakład ubezpieczeń	Składka przypisana brutto w mln zł	
	2016	2017
AEGON TU na ŻYCIE S.A.	454,0	448,2
TU ALLIANZ ŻYCIE POLSKA S.A.	591,5	596,5
AVIVA TUnŻ S.A.	1 934,2	1 879,3
AXA ŻYCIE TU S.A.	1 093,9	1 053,5
TUnŻ CARDIF POLSKA S.A.	253,8	300,2
COMPENSA TU na ŻYCIE S.A. Vienna Insurance Group	487,5	533,4
WTUŻiR CONCORDIA CAPITAL SA	60,0	61,5
STUnŻ ERGO HESTIA SA	904,5	419,0
TU na ŻYCIE EUROPA S.A.	1 178,6	1 205,4
GENERALI ŻYCIE T.U. S.A.	984,6	974,9
TU INTER –ŻYCIE POLSKA S.A.	11,8	13,1
MACIF ŻYCIE TUW	21,0	20,5
METLIFE TUnŻiR S.A.	1 375,9	850,4
NATIONALE –NEDERLANDEN TUnŻ S.A.	1 356,3	1 687,1
OPEN LIFE TU ŻYCIE S.A.	1 477,8	2 354,1
PKO ŻYCIE TU S.A.	900,6	471,0
POCZTOWE TUnŻ S.A.	27,2	34,3
POLISA –ŻYCIE TU S.A. Vienna Insurance Group	289,2	331,3
PRAMERICA ŻYCIE TUiR SA	249,0	261,8
PZU ŻYCIE SA	8 034,4	8 563,1
TUW REJENT –LIFE	16,8	17,2
SALTUS TU ŻYCIE SA	45,1	37,9
SANTANDER AVIVA TU na ŻYCIE S.A.	230,7	199,3
SIGNAL IDUNA ŻYCIE POLSKA TU S.A.	40,0	35,5
UNIQA TU na ŻYCIE S.A.	329,3	744,9
VIENNA LIFE TU na ŻYCIE S.A. Vienna Insurance Group	755,3	662,1
TUnŻ WARTA S.A.	743,3	805,8
Razem	23 846,3	24 561,3

Źródło: [Rocznik rynku ubezpieczeń... 2017].

Zbiorowość statystyczna jest nieliczna (27 jednostek), do przedstawienia prawidłowości rozkładu nie jest konieczne zbudowanie szeregu rozdzielczego. Rozkład wysokości składki w badanych okresach przedstawia rysunek 2.1.



Rysunek 2.1. Składka przypisana brutto zakładów ubezpieczeń na życie w 2016 i 2017 r. (w mln zł)

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych zawartych w tablicy 2.5.

W przedstawionym przykładzie łatwo zauważyć wartość odstającą składki przypisanej brutto w PZU ŻYCIE SA (na poziomie ponad 8 mld zł). Pozostałe wartości wysokości składki przypisanej nie przekraczają poziomu 2 mld zł. Wartość odstająca będzie miała silny wpływ na ocenę własności badanego rozkładu. Czy więc należy uwzględniać w analizie wszystkie jednostki, czy też pominąć odstającą? Jeśli pozostawimy w analizie wszystkich ubezpieczycieli, średnia arytmetyczna wartość składki przypisanej brutto będzie mocno zawyżona w stosunku do poziomu rozumianego jako przeciętny, jeśli natomiast pominiemy wartość odstającą, można zadać sobie kolejne pytanie – czy można pominąć największego ubezpieczyciela na rynku? Czy może lepiej w takiej sytuacji, zamiast pomijać wartość odstającą, zastosować miary pozycyjne, które nie są wrażliwe na wartości nietypowe?

Przeprowadźmy analizę, zarówno uwzględniając, jak i pomijając wartość PZU ŻYCIE SA., stosując miary klasyczne i pozycyjne. Wyniki analizy przedstawia tablica 2.6.

Tablica 2.6 Parametry położenia rozkładu wysokości składki przypisanej brutto w 2016 i 2017 r. z uwzględnieniem i bez uwzględnienia PZU ŻYCIE SA w mln zł

Parametr	Z PZU ŻYCIE SA		Bez PZU ŻYCIE SA	
	2016	2017	2016	2017
minimum	11,8	13,1	11,8	13,1
maksimum	8 034,4	8 563,1	1 934,2	2 354,1
średnia	883,2	909,7	608,1	615,3
mediana	487,5	471,0	470,8	459,6
kwartył 1	145,4	130,4	102,7	95,9
kwartył 3	1 039,3	912,7	964,6	839,3
dominanta	brak	brak	brak	brak

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z tablicy 2.5.

Przeciętna wysokość składki przypisanej brutto dla wszystkich zakładów ubezpieczeń w 2016 r. wyniosła ponad 883 mln zł, rok później była wyższa i wyniosła blisko 910 mln zł. Jeśli pominiemy największego ubezpieczyciela – średnia składka w porównywanych okresach była o blisko 300 mln zł niższa i w 2016 r. wyniosła 608 mln zł, zaś w 2017 r. – 615 mln zł. Różnice w wartościach potwierdzają dużą wrażliwość średniej arytmetycznej (i innych miar klasycznych) na wartości odstające. Inaczej jest w przypadku miar pozycyjnych. Wartość mediany w 2016 r. wskazuje, że w połowie wszystkich zakładów ubezpieczeniowych składka przypisana była nie wyższa niż 487,5 mln zł brutto (w 2017 r. nie przekroczyła 471 mln zł). Po pominięciu PZU w 2016 r. połowa pozostałych zakładów ubezpieczeń osiągnęła wartość składki przypisanej nie wyższą niż 471 mln zł (w 2017 r. nie wyższą niż 460 mln zł). Różnice między wartościami są niewielkie i wynikają jedynie ze zmiany pozycji mediany w szeregu na skutek przesunięcia środka w całej zbiorowości²⁸.

Wartość kwartyła pierwszego z uwzględnieniem wszystkich ubezpieczycieli informuje, że w 2016 r. 25% z nich miało składkę nie wyższą niż 145,4 mln zł (w 2017 r. 130,4 mln zł), natomiast po usunięciu PZU Życie SA granica ta przesunęła się do poziomu 102,7 mln zł w roku 2016 (96 mln zł w 2017 r.). Wartość kwartyła trzeciego informuje, że spośród wszystkich zakładów 75% z nich osiągnęło składkę przypisaną brutto na poziomie nieprzekraczającym 1039,3 mln zł w 2016 r. (912,7 mln zł w 2017 r.), zaś w sytuacji gdy nie uwzględnimy składki dla PZU ŻYCIE SA, wartość parametru wynosiła 964,6 mln zł

²⁸ Przypomnijmy, że pozycja mediany wyznaczana jest wg formuły $\frac{n+1}{2}$, tak więc zależna jest od liczebności badanej zbiorowości.

w 2016 r. (839,3 mln zł w 2017 r.). Z przedstawionych relacji między wartościami parametrów z wartością odstającą i bez niej wynika, że tylko średnia arytmetyczna wyraźnie „zareagowała” na usunięcie jednostki skrajnej (PZU ŻYCIE SA), w przypadku pozostałych parametrów różnice nie są znaczne i wynikają jedynie z przesunięcia pozycji danego parametru w szeregu.

W tablicy 2.7 przedstawiono wartości parametrów dyspersji i asymetrii wysokości składki przypisanej brutto.

Tablica 2.7. Wartości parametrów dyspersji i asymetrii wysokości składki przypisanej brutto w 2016 i 2017 r.

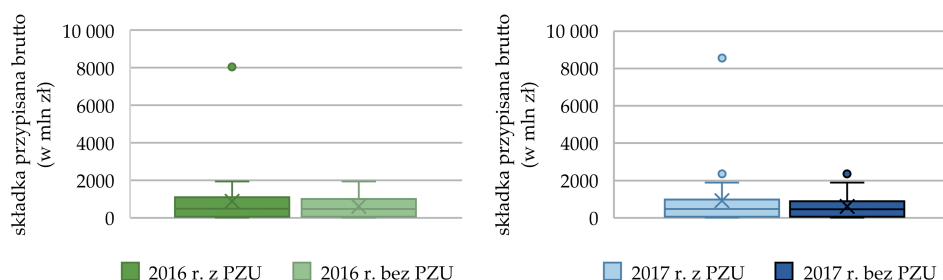
Parametr	Z PZU ŻYCIE SA		Bez PZU ŻYCIE SA	
	2016	2017	2016	2017
odchylenie standardowe (mln zł)	1 498,5	1 614,0	537,9	604,8
współczynnik zmienności (%)	169,67%	177,43%	88,45%	98,29%
moment trzeci względny	3,98	3,93	0,65	1,22
odchylenie ćwiartkowe (mln zł)	446,9	391,1	430,9	371,7
współczynnik zmienności (oparty o kwartyle)	92,00%	83,00%	92,00%	81,00%
współczynnik asymetrii (oparty o kwartyle)	0,23	0,13	0,15	0,02

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych KNF.

Wartości miar klasycznych oszacowane dla wszystkich ubezpieczycieli wskazują na bardzo silne natężenie zróżnicowania (2016 r. 169,7%, 2017 r. 177,4% poziomu średniego) oraz skrajną asymetrię. Jest to skutkiem występowania wartości odstającej. W takiej sytuacji zasadne jest zastosowanie miar pozycyjnych. Uzyskane wyniki informują, że wśród badanych 50% środkowych zakładów ubezpieczeń natężenie zróżnicowania składki jest bardzo silne (odpowiednio 92% i 83% mediany) i rozkłady wykazują niewielką asymetrię prawostronną. Jak łatwo zauważyć, w przypadku miar klasycznych usunięcie z analizy PZU ŻYCIE SA znacząco zmieniło ocenę własności rozkładu, nie zmieniło jej natomiast, gdy ograniczyliśmy badanie do środkowej części rozkładu.

Różnice w rozkładzie wysokości składki przypisanej brutto z uwzględnieniem i bez uwzględnienia PZU przedstawiono za pomocą wykresu „skrzynka-wąsy”²⁹ na rysunku 2.2.

²⁹ Wykres skrzynka-wąsy (pudełkowy, skrzynkowy, box-plot) wyznaczany jest w oparciu o wartość kwartyla pierwszego i trzeciego (pudełko) oraz o wartość minimalną i maksymalną w obszarze 1,5 rozstępu kwartylowego (wąsy). Linia wewnątrz pudełka



Rysunek 2.2. Składka przypisana brutto zakładów ubezpieczeń na życie w 2016 i 2017 r. (w mln zł)

Źródło: Opracowanie własne na podstawie tablicy 2.5.

Na wykresach wyraźnie widać, że wysokość składki przypisanej w PZU jest wartością odstającą i uwzględnienie jej powoduje, że wartość średniej arytmetycznej (zaznaczonej symbolem x) nie reprezentuje większości obserwacji. Po wyeliminowaniu tej jednostki kształt rozkładu (pudełka) nie ulega zmianie, a wartość średniej arytmetycznej znacznie zbliżyła się do środka pudełka.

Większość analiz statystycznych przeprowadza się na danych szczegółowych. Może się jednak zdarzyć, że do oceny rozkładu będziemy wykorzystywać materiał wtórny i dane będą już pogrupowane, przedstawione w formie szeregu rozdzielczego przedziałowego.

Przykład 2.4

Tablica 1.6. przedstawia rozkład wieku osób ubezpieczonych posiadających polisę OC w okresie od 1 do 15 lipca 2019 r. (dane umowne). Jest to szereg o domkniętych przedziałach, przedziały klasowe mają taką samą rozpiętość. Rozkład liczebności wykazuje niewielką asymetrię lewostronną. W takiej sytuacji do oceny wieku możemy wykorzystać miary klasyczne.

odpowiada wartości mediany, symbol x wartości średniej arytmetycznej. Kropką zaznaczone są wartości odstające.

Tablica 2.8. Wartości parametrów klasycznych rozkładu wieku (w latach) osób posiadających polisę OC (dane umowne)

Parametr	Wartość parametru
średnia arytmetyczna	41,2 lat
wariancja	89,5 lat ²
odchylenie standardowe	9,5 lat
współczynnik zmienności	23,0%
moment trzeci względny	- 0,2

Źródło: Obliczenia własne na podstawie tablicy 1.6.

Uzyskane wyniki informują, że średnia wieku kierowców posiadających polisę OC wynosi nieco ponad 41 lat. Wiek poszczególnych kierowców różni się przeciętnie od średniego wieku o 9,5 roku, co stanowi 23,0% i informuje o słabym natężeniu dyspersji. Badanie potwierdziło występowanie asymetrii lewostronnej o niewielkim natężeniu (-0,2), co oznacza, że większość kierowców jest w wieku powyżej średniej.

Jakie dodatkowe informacje uzyskamy, stosując w tym przypadku miary pozycyjne³⁰?

Tablica 2.9. Wartości parametrów pozycyjnych rozkładu wieku (w latach) kierowców posiadających polisę OC w 2019 r.

Parametr	Wartość parametru
mediana	42,0 lata
dominanta	43,1 lat
kwartyl pierwszy	34,4 lat
kwartyl trzeci	48,5 lat
decyl pierwszy	27,3 lat
decyl dziewiąty	54,0 lata

Źródło: Obliczenia własne na podstawie tablicy 1.6.

Połowa kierowców posiadających polisę OC ma co najwyżej 42 lata, a najwięcej jest w wieku 43 lat. Wartości średniej arytmetycznej, mediany i dominanty położone są blisko siebie, co dowodzi występowania tendencji

³⁰ Ze względu na szereg rozdzielnicy przedziałowy parametry pozycyjne, po wcześniejszym ustaleniu ich pozycji, wyznaczane są w oparciu o wzory interpolacyjne; szerzej na ten temat m.in. w: [Makać, Urbanek-Krzysztofiak 2008; Sobczyk 2005].

centralnej i słabej asymetrii (w tym przypadku lewostronnej³¹). Wartości pozostałych kwantyli informują, że 10% najmłodszych kierowców miało nie więcej niż 27,3 lat, a 25% nie więcej niż 34,4 lat, zaś 25% najstarszych kierowców miało co najmniej 48,5 lat, a 10% nie mniej niż 54,0 lata. Ocena pozostałych własności rozkładu wieku na podstawie miar pozycyjnych jest zbędna, gdyż przy tak niewielkim zróżnicowaniu i małej asymetrii ograniczyłaby wnioski dla części zbiorowości (do 50% – gdybyśmy taką analizę przeprowadzili na podstawie kwartyli, czy 80% – w sytuacji opisu na podstawie decyli).

Powyższe przykłady dowodzą, że jedynie właściwy dobór parametrów pozwala prawidłowo pokazać własności rozkładów. Nie ma potrzeby wyznaczania wszystkich znanych miar, dobierzmy te, które w danej sytuacji są stosowne.

2.4. Wskaźniki struktury i natężenia

Przydatnym narzędziem statystycznego opisu badanych zbiorowości i zjawisk są liczby względne, tzw. **wskaźniki**. Są one stosunkiem (ilorazem) dwóch wielkości absolutnych i mogą mieć postać relacji wyróżnionej części zbiorowości do jej całości (wskaźnik struktury) lub też mogą być ilorazem dwóch logicznie powiązanych ze sobą zbiorowości lub zjawisk (wskaźniki natężenia). Wskaźniki można stosować, przedstawiając wyróżnione części zbiorowości (np. odsetek rolników ubezpieczających swoje uprawy), można je również wykorzystywać, analizując rozkłady cech, co pokazują zamieszczone niżej przykłady.

Wskaźnik struktury

Analiza struktury polega na określeniu relacji elementów składowych w łącznej wartości z punktu widzenia wyróżnionej cechy. **Wskaźnik struktury** (udział względny, częstość względna) jest to część (n_i) do całości (n), najczęściej pomnożona przez 100. Informuje, jaką część (jaki procent) stanowi wyróżniona część w całości:

³¹ Przypomnijmy, że między parametrami położenia zachodzą relacje określające typ rozkładu empirycznego:

$\bar{x} < Me < D$ – rozkład asymetryczny lewostronnie,

$\bar{x} = Me = D$ – rozkład symetryczny,

$\bar{x} > Me > D$ – rozkład asymetryczny prawostronnie.

$$W_i = \frac{n_i}{n} \times 100 = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \times 100 \quad (2.1)$$

Walorem wskaźników struktury, oprócz tego, że są to liczby niemianowane, jest ponadto fakt, że mogą być stosowane dla dowolnych cech, zarówno mierzalnych, jak i niemierzalnych, gdyż wykorzystują liczebności cząstkowe i łączną liczebność zbiorowości, bez udziału samych wariantów cechy.

Badanie w oparciu o wskaźniki struktury może być prowadzone w czasie i w przestrzeni. Zestawianie wskaźników struktury z różnych okresów pozwala zorientować się w tendencjach zmian. Ponadto poszczególne części zbiorowości mogą mieć różne właściwości i podlegać wpływom innych czynników.

Przykład 2.5

Wysokość składki przypisanej brutto według rodzaju ubezpieczeń w Dziale II w 2010 i 2017 r. przedstawia tablica 2.10.

Tablica 2.10. Wysokość składki przypisanej brutto (w mln zł) według rodzajów ubezpieczeń oraz ich udział (w %) w Dziale II w 2010 i 2017 r.

Lp.	Rodzaj ubezpieczeń	Składka przypisana brutto (w mln zł)		Udział (w %)		Wartość minimalna z pary (udział ₂₀₁₀ , udział ₂₀₁₇)
		2010	2017	2010	2017	
1	Motoryzacyjne	12 790	22 463	56,2	59,4	56,2
2	Majątkowe	4 161	6 221	18,3	16,5	16,5
3	Osobowe	1 613	2 181	7,1	5,8	5,8
4	Finansowe	1 809	1 702	8,0	4,5	4,5
5	OC	1 244	1 953	5,5	5,2	5,2
6	MAT	276	295	1,2	0,8	0,8
7	Pozostałe	848	2 977	3,7	7,9	3,7
8	Ogółem	22 741	37 792	100	100	92,7

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Raport roczny PIU 2017].

W obu badanych okresach największy udział w wartości składki przypisanej brutto miały ubezpieczenia motoryzacyjne. Ich udział w 2010 r. wynosił 56,2%, a w 2017 r. 59,4%. Najmniejszy udział miały ubezpieczenia MAT. Ich udział w badanych okresach wynosił odpowiednio 1,2% i 0,8%. Spośród wyróżnionych grup ubezpieczeń jedynie w ubezpieczeniach motoryzacyjnych odnotowano wzrost udziału składki w ogólnej jej wartości. Wzrost ten wynosił

3,2 p.p. Największy spadek udziału wystąpił w ubezpieczeniach finansowych i wynosił 3,5 p.p., a najmniejszy w ubezpieczeniach OC i wynosił 0,3 p.p. Zmiany w strukturze w porównywanych okresach są wynikiem różnego przyrostu/ubytku względnego³². Wzrost wysokości składki wystąpił niemal we wszystkich rodzajach ubezpieczeń, z czego najwyższy w grupie ubezpieczeń motoryzacyjnych oraz OC i wynosił odpowiednio 75,6% oraz 57,0%. Spadek wartości składki odnotowano jedynie w przypadku ubezpieczeń finansowych i wyniósł on 5,9%. Zmiany udziału poszczególnych rodzajów ubezpieczeń zachodziły w różnych kierunkach i z różnym natężeniem. Chcąc uogólnić wszystkie zmiany i określić, na ile zmieniła się ogólna struktura wysokości składki według rodzajów ubezpieczeń, można posłużyć się m.in. **wskaźnikiem podobieństwa struktur** postaci³³:

$$W_{p.str.} = \frac{\sum_{i=1}^k \min(W_{1i}; W_{2i})}{\sum_{i=1}^k \max(W_{1i}; W_{2i})} = \frac{\sum_{i=1}^k \min(W_{1i}; W_{2i})}{200 - \sum_{i=1}^k \min(W_{1i}; W_{2i})} \quad (2.2)$$

gdzie: W_{1i} , W_{2i} – wskaźniki struktury wariantu cechy.

Obliczając wskaźnik, porównujemy parami wskaźniki struktury we wszystkich klasach i oddzielnie sumujemy wartości mniejsze i większe w parach:

$$W_{p.str.} = \frac{56,2 + 16,5 + 5,8 + 4,5 + 5,2 + 0,8 + 3,7}{59,4 + 18,3 + 7,1 + 8,0 + 5,5 + 1,2 + 7,9} = \frac{92,7}{107,3} = 0,8631$$

Wskaźnik podobieństwa struktur przyjmuje wartości z przedziału $\langle 0; 1 \rangle$. Wartość 0 informuje, że struktury są zupełnie różne, a wartość 1, że są identyczne. Przykładowa interpretacja wartości wskaźnika podobieństwa struktur może być następująca:

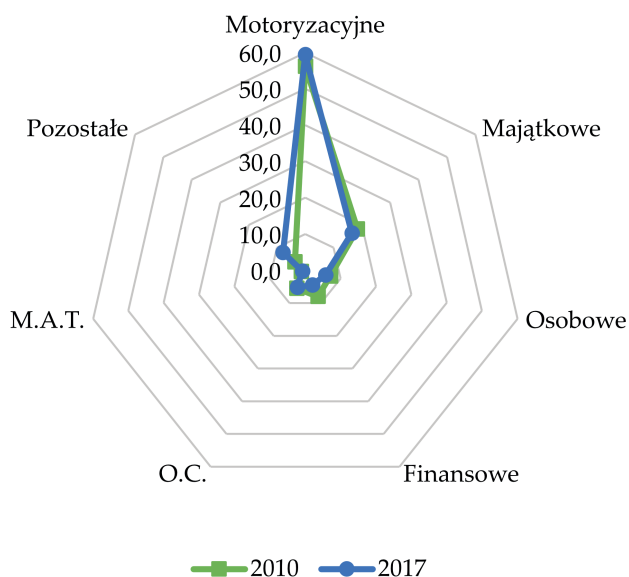
$W_{p.str.} \leq 0,6$ brak podobieństwa struktur zbiorowości ze względu na badaną cechę,
 $0,6 < W_{p.str.} \leq 0,7$ podobieństwo małe,
 $0,7 < W_{p.str.} \leq 0,8$ podobieństwo znaczne,
 $0,8 < W_{p.str.} \leq 0,9$ podobieństwo duże,
 $0,9 < W_{p.str.} < 1$ podobieństwo bardzo duże, dwie zbiorowości mają bardzo podobną strukturę ze względu na badaną cechę.

Uzyskany wynik 0,8631 wskazuje, że struktura składki ubezpieczeniowej według rodzaju ubezpieczeń w Dziale II w 2017 r. była bardzo podobna do struktury z 2010 r. Znacząco zmieniła się wysokość składki ogółem i w poszczególnych grupach. Dynamika zmian w poszczególnych grupach

³² Miary dynamiki omówiono w rozdziale 5.

³³ Inne miary podobieństwa struktur m.in. w: [Ostasiewicz, Rusnak, Siedlecka 2006; Ostasiewicz 2011].

była podobna i to spowodowało, że zmiany te nie wpłynęły istotnie na zmianę struktury. Zmiany w strukturze przedstawia rysunek 2.3 (inne możliwe do wykorzystania wykresy powierzchniowe: kołowe, prostokątne, kwadratowe).



Rysunek 2.3. Struktura składki przypisanej brutto w Dziale II w 2010 i 2017 r. (w %)

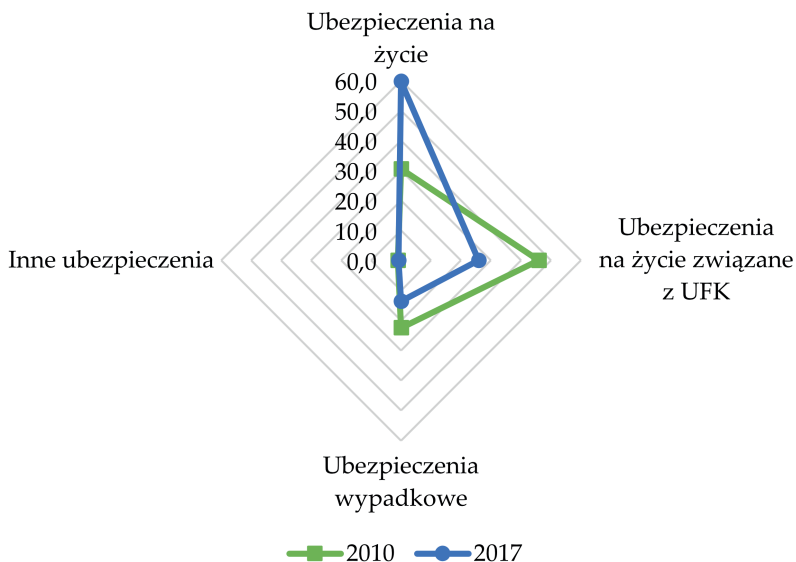
Źródło: Opracowanie własne na podstawie tablicy 2.10.

Znacznie większe zmiany w strukturze składki przypisanej brutto między porównywanymi okresami obserwowano w Dziale I ubezpieczeń. Strukturę tę przedstawia tablica 2.11 oraz rysunek 2.4.

Tablica 2.11. Struktura składki przypisanej brutto w Dziale I w 2010 i 2017 r. (w %)

Rodzaj ubezpieczeń	Składka przypisana brutto (w %)	
	2010	2017
Ubezpieczenia na życie	30,5	59,7
Ubezpieczenia na życie związane z UFK	45,9	25,8
Ubezpieczenia wypadkowe	22,4	13,6
Inne ubezpieczenia	1,1	0,9
Ogółem	100,0	100,0

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Raport roczny PIU 2017]



Rysunek 2.4. Struktura składki przypisanej brutto w Dziale I w 2010 i 2017 r. (w %)

Źródło: Opracowanie własne na podstawie tablicy 2.11.

W 2010 r. największy udział w ogólnej składce przypisanej brutto miały ubezpieczenia na życie związane z UFK, które stanowiły 45,9%, natomiast w 2017 r. największy udział miały ubezpieczenia na życie i stanowiły 59,7%. W tej grupie wystąpił największy wzrost udziału, który wynosił 29,2 p.p. Największy spadek zaobserwowano w ubezpieczeniach na życie z ubezpieczeniowym funduszem kapitałowym (UFK) – o 20,1 p.p. Tak znaczna zmiana struktury rynku ubezpieczeń Działu I wynikała z wielu czynników, głównie kryzysu finansowego, którego efekty można było obserwować od roku 2008 oraz nieprawidłowości przy zawieraniu umów ubezpieczenia na życie z funduszem inwestycyjnym (tzw. misseling). Sytuację tę dobrze obrazuje cytata z pracy „nieprawidłowości przy sprzedaży tych polis mszczą się na ubezpieczycielach. Polisy z UFK nie tylko nie zarobiły dla klientów tyle, ile obiecywali sprzedawcy, ale często przynosiły spore straty. Były też obciążone mnóstwem opłat, z których klienci nie zdawali sobie sprawy, podobnie jak z ryzyka związanego z inwestycjami. A gdy zorientowali się, że tracą i chcieli się wycofać z niefortunnych inwestycji, to tracili jeszcze więcej, gdyż opłaty za wyjście sięgały nawet 100 proc. wpłaconych środków. Wprawdzie przepisy się zmieniły i lepiej chronią konsumentów, a towarzystwa zawarły z klientami szereg ugód, ale osoby, które dotrwały do końca umowy, raczej nie pałą się do

jej przedłużania. Umowy, jakkolwiek bez porównania lepsze od tych sprzed dziesięciu lat, często nadal pozostawiają wiele do życzenia. Do tego dochodzi sytuacja na giełdzie, nie zachęcająca do kupowania produktów inwestycyjnych” [Skibińska 2019]. Wartość wskaźnika prawdopodobieństwa struktur wynosi 0,548, co świadczy o znacznych zmianach w strukturze składki przypisanej brutto w Dziale I – struktura składki w 2017 r. była inna niż w 2010 r.

Wskaźnik natężenia

Wskaźnik natężenia to stosunek liczby jednostek (wielkości cechy) danej zbiorowości (n_i) do liczby jednostek (wielkości cechy) innej zbiorowości (m_i), które pozostają w logicznym związku:

$$W_i = \frac{n_i}{m_i} \times C \quad (2.3)$$

gdzie: C przyjmuje wartości 1, 100, 1000..... (wartość C zależy od poziomu cechy, ułatwia interpretację wyniku).

Współczynnik natężenia jest wielkością mianowaną – określa liczbę jednostek pierwszej zbiorowości przypadającą na określoną jednostkę drugiej zbiorowości. Wyniki najczęściej są mnożone przez 100. Ze względu na to, że jest to relacja dwóch różnych zbiorowości, uzyskanego wyniku nie należy jednak interpretować, podobnie jak wskaźnika struktury, czyli, że wartość cechy X stanowi określony procent wartości cechy Y. Uzyskane wyniki często przekraczają wartość 100. Wskaźniki natężenia mają szczególne znaczenie w analizach porównawczych w czasie i przestrzeni, w sytuacji gdy zestawiane zmienne charakteryzują się różną dynamiką lub kierunkami zmian.

Przykłady mierników natężenia stosowanych w ubezpieczeniach:

- 1) wskaźnik poziomu ochrony ubezpieczeniowej (wskaźnik gęstości ubezpieczeń) – jest to iloraz poziomu łącznej wysokości wszystkich składek przypisanych brutto i liczby mieszkańców. Informacja, że składka przypisana brutto *per capita* (w zł) w Dziale I w 2017 r. wynosiła 639, oznacza, że w przeliczeniu na jednego mieszkańca Polski wysokość składki w tym roku wynosiła 639 zł;
- 2) stopa rezerw technicznych – to iloraz wartości rezerw techniczno-ubezpieczeniowych na udziale własnym i wartości składki przypisanej na udziale własnym. Stopa rezerw technicznych zakładów ubezpieczeń ogółem w 2018 r. wynosiła 242,12, co oznacza, że na każde 100 zł

składki przypisanej na udziale własnym przypada około 242 zł rezerw techniczno-ubezpieczeniowych na udziale własnym;

- 3) współczynnik szkodowości na udziale własnym to iloraz wysokości wypłaconych odszkodowań i świadczeń oraz wysokości składki zarobionej na udziale własnym. Współczynnik szkodowości na udziale własnym ubezpieczeń ogółem w 2018 r. wynosił 76,82, co oznacza, że na każde 100 zł składki zarobionej na udziale własnym przypada około 77 zł wypłaconych odszkodowań i świadczeń.

Przykład 2.6

Informacje o liczbie wypadków drogowych z udziałem pojazdów według wieku kierującego pojazdem, liczbę ludności Polski w poszczególnych grupach wiekowych oraz wskaźnik liczby wypadków w przeliczeniu na 10 000 osób przedstawia tablica 2.12.

Tablica 2.12. Liczba wypadków według wieku sprawcy wypadku – kierującego pojazdem oraz wskaźnik liczby wypadków na 10 000 osób w Polsce w 2018 r.

Grupy wiekowe	Liczba wypadków	Liczba ludności*	Liczba wypadków na 10 000 osób
0–6	14	2 680 493	0,05
7–14	300	3 164 652	0,9
15–17	272	1 083 278	2,51
18–24	5 550	2 922 156	18,99
25–39	9 230	8 903 584	10,37
40–59	7 328	10 266 316	7,14
60 lat i więcej	4 428	9 392 660	4,71
brak danych	1 237	x	x

* stan na 30.06.2018

Źródło: Obliczenia własne na podstawie: [Wypadki drogowe w Polsce... 2019].

Z przedstawionych danych wynika, że najwięcej było wypadków, których sprawcy byli w wieku 25–39 lat oraz 40–59 lat. Jednakże przedziały w przedstawionym szeregu nie mają jednakowej rozpiętości i wysokie liczebności mogą być spowodowane większą rozpiętością przedziałów. Największa liczebność nie jest jednoznaczna z największym natężeniem wypadkowości. Jeżeli uwzględnimy liczbę osób w poszczególnych grupach wiekowych i przeliczymy liczbę sprawców wypadków na 10 000 osób w danej grupie wiekowej (obliczymy wskaźniki natężenia), to okazuje się, że największe natężenie wypadkowości dotyczy osób w wieku 18–24 lata. W tej grupie

wiekowej na każde 10 000 osób przypadało około 19 wypadków, których sprawcami były osoby w tym wieku. Grupa wiekowa 25–39 lat, która była najliczniejsza pod względem liczby wypadków, jest drugą pod względem natężenia wypadkowości.

Po lekturze rozdziału Czytelnik powinien:

- umieć dobrać, obliczyć i zinterpretować parametry klasyczne i pozycyjne opisujące rozkład badanej cechy,
- porównywać rozkłady ze względu na poziom badanej cechy,
- umieć obliczać i interpretować wskaźniki struktury i natężenia,
- oceniać podobieństwo struktur.

Pytania sprawdzające

1. Wymień warunki stosowania średniej arytmetycznej. Kiedy może, a kiedy musi być zastąpiona inną miarą położenia?
2. Wymień i scharakteryzuj własności rozkładów empirycznych. Czy zawsze należy opisać wszystkie własności?
3. Rozkład wieku ofiar wypadków drogowych przedstawia tablica 2.13. Stosując odpowiednie miary opisu struktury, odpowiedz na pytania zamieszczone poniżej.

Tablica 2.13. Ofiary wypadków drogowych według wieku i skutków wypadku w 2018 r.

Wiek w latach	Zabici	Ranni
0–6	16	861
7–14	41	2097
15–17	64	1524
18–24	374	5728
25–39	675	10446
40–59	741	9306
60 i więcej	949	7341

Źródło: [Wypadki drogowe w Polsce... 2019].

- 3.1. Który z badanych rozkładów wykazuje tendencję centralną?
- 3.2. Która grupa ofiar wypadków drogowych (zabici czy ranni) jest bardziej zróżnicowana pod względem wieku?
- 3.3. Czy w obu przypadkach wśród ofiar przeważają osoby starsze?
- 3.4. Które parametry opisu struktury należy zastosować i dlaczego?

4. Wykorzystując dane zawarte w tablicy 2.14, porównaj rozkłady kosztów administracyjnych ponoszonych przez ubezpieczycieli w latach 2016 i 2017. Dobór miar uzasadnij. Następnie odpowiedz na zamieszczone poniżej pytania.

Tablica 2.14. Wysokość kosztów administracyjnych zakładów ubezpieczeń w 2016 r. i 2017 r. w tys. zł

Lp.	Nazwa ubezpieczyciela	Koszty administracyjne	
		2016	2017
1	REJENT LIFE TUW	936	1 035
2	INTER - ŻYCIE SA	1 623	1 803
3	MACIF ŻYCIE TUW	4 999	4 904
4	SIGNAL IDUNA ŻYCIE SA	6 309	6 502
5	POCZTOWE ŻYCIE SA	7 191	6 763
6	UNIQA ŻYCIE SA	9 613	8 990
7	CONCORDIA CAPITAL SA	8 743	9 776
8	SALTUS ŻYCIE SA	14 346	12 921
9	BZWBK-AVIVA TUŃ SA	15 557	16 186
10	CARDIF POLSKA SA	17 510	19 943
11	PKO ŻYCIE SA	27 333	23 909
12	ERGO HESTIA STUŃ SA	24 756	25 771
13	OPEN LEFE SA	23 175	28 023
14	POLISA - ŻYCIE SA	29 924	31 271
15	WARTA TUŃ SA	31 185	31 404
16	ALLIANZ ŻYCIE POLSKA SA	31 308	31 914
17	EUROPA ŻYCIE SA	29 350	40 234
18	VIENNA LIFE SA	60 002	41 546
19	COMPENSA ŻYCIE SA	45 972	45 976
20	PRAMERICA ŻYCIE SA	56 970	55 574
21	GENERALI ŻYCIE SA	63 481	58 420
22	AEGON SA	62 155	62 125
23	AXA ŻYCIE SA	86 560	82 359
24	NATIONALE NEDERLANDEN SA	134 836	90 317
25	AVIVA ŻYCIE SA	99 285	120 905
26	METLIFE TUŃ SA	164 392	141 241
27	PZU ŻYCIE SA	653 169	653 438
	Ogółem	1 710 682	1 653 252

Źródło: [Rocznik rynku ubezpieczeń... 2017].

- 4.1. Czy w porównywanych okresach przeciętny poziom ponoszonych kosztów administracyjnych uległ zmianie?
- 4.2. Jakie koszty administracyjne w badanych latach ponosiło 20% zakładów o najniższych nominalnych wydatkach na administrację?
- 4.3. Czy wśród ubezpieczycieli w badanych latach dominowały zakłady ponoszące wyższe niż przeciętne koszty administracyjne czy też te, których koszty były niższe od średnich?
5. Jak nazywamy miarę ukazującą relację części zbiorowości do jej całości?
6. Jak nazywamy miarę będącą relacją wartości dwóch różnych logicznie ze sobą powiązanych zbiorowości?
7. Wyплаcone odszkodowania i świadczenia w Dziale II w latach 2016 i 2017, przez największych ubezpieczycieli przedstawia tablica 2.15. Na podstawie informacji w niej zawartych odpowiedz na poniższe pytania.
 - 7.1. Ile wynoszą wskaźniki struktury?
 - 7.2. Jaka jest wartość wskaźnika podobieństwa struktur?

Tablica 2.15. Wysokość odszkodowań i świadczeń wypłaconych brutto (mln zł) przez zakłady ubezpieczeń Działu II w 2016 i 2017 r.

Ubezpieczyciel	Wysokość odszkodowań i świadczeń wypłaconych brutto (mln zł)	
	2016	2017
PZU SA	6 393 045	6 942 310
WARTA SA	2 488 850	2 703 236
ERGO HESTIA SA	2 401 099	2 463 602
ALLIANZ POLSKA SA	1 063 048	1 057 820
COMPENSA SA	859 804	888 386
AXA UBEZPIECZENIA SA	520 842	846 779
GENERALI SA	825 200	763 141
UNIQA SA	706 930	691 634
INTERRISK SA	581 632	551 937
Pozostałe	2 549 964	2 576 531
Ogółem	18 390 414	19 485 376

Źródło: [Raport roczny PIU 2017].

8. Strukturę ubezpieczeń w Dziale I (w %) w latach 2005, 2010, 2017 przedstawia tablica 2.16. Ile wynoszą wskaźniki struktury ubezpieczeń w przedstawionych okresach? Między którymi latami zmiany w strukturze były największe?

Tablica 2.16. Struktura ubezpieczeń w Dziale I (w %) w latach 2005, 2010, 2017

Ubezpieczenie	2005	2010	2017
Grupa I	45,0	59,7	30,5
Grupa II	1,0	0,4	0,5
Grupa III	36,6	25,8	45,9
Grupa IV	0,2	0,3	0,6
Grupa V	16,4	13,6	22,4
Reasekuracja czynna	0,8	0,2	0,1
Ogółem	100,0	100,0	100,0

Źródło: [Raport roczny PIU 2017].

Rozdział 3

Koncentracja rynkowa

Ewa Wycinka

Hasła: koncentracja rynkowa, krzywa koncentracji, wskaźnik Herfindahla-Hirschmana

3.1. Istota koncentracji rynkowej

Cechą współczesnych rynków jest występowanie na nich procesów koncentracji, mogących prowadzić do ograniczenia konkurencji i efektywności funkcjonowania rynku oraz do powstania oligopolu³⁴, a nawet monopolu [Czerwonka, Pankau 2005; Matczak 2016]. Zjawisko to jest zwykle oceniane negatywnie, gdyż generuje straty społeczne w postaci nieuzasadnionego podnoszenia cen przez przedsiębiorstwo dominujące³⁵, ograniczenia produkcji i niewykorzystywania w pełni zdolności produkcyjnych. Brak konkurencji to również brak presji na obniżanie kosztów i wprowadzanie innowacji. Z dominacją przedsiębiorstw mamy zwykle do czynienia na tych rynkach, na których są bariery wejścia [Czerwonka, Pankau 2005]. Sytuacja taka ma miejsce na rynku ubezpieczeń, gdzie uzyskanie zezwolenia na wykonywanie działalności ubezpieczeniowej wymaga spełnienia przez nowo powstające zakłady ubezpieczeń wielu wymogów prawnych i kapitałowych.

Koncentracja nie jest jednak jednoznacznie negatywnym zjawiskiem. Może być ona rozpatrywana z punktu widzenia korzyści, jakie generuje. Koncentracja rynku następująca w wyniku fuzji i przejęć przedsiębiorstw prowadzi do tego, że połączone przedsiębiorstwa mogą wykorzystać efekt

³⁴ Monopol to rynek, na którym przedsiębiorstwo lub grupa powiązanych przedsiębiorstw jest jedynym producentem lub dostawcą usług, a dla innych przedsiębiorstw istnieją bariery wejścia na rynek. Natomiast oligopol to rynek, na którym kilka przedsiębiorstw pokrywa większość popytu. Dominująca pozycja pozwala im na decydowanie o wielkości podaży i daje możliwość zawierania porozumień odnośnie cen.

³⁵ Według przepisów prawa za przedsiębiorstwo dominujące uważa się takie, które posiada 40–50% udziałów w rynku właściwym.

skali oraz obniżyć koszty transakcyjne [Czerwonka, Pankau 2005]. Ze względu na znaczenie dla gospodarek procesy koncentracji muszą być na bieżąco analizowane i w szczególnych sytuacjach, gdy społeczne koszty koncentracji przewyższają ewentualne korzyści, odpowiednie instytucje podejmują środki zapobiegające zwiększeniu koncentracji rynku. W przypadku gdy koncentracja dotyczy rynku właściwego³⁶ w obrębie jednego państwa, działania są podejmowane przez odpowiednie instytucje państwowe. W Polsce funkcje urzędu antymonopolowego spełnia Urząd Ochrony Konkurencji i Konsumentów (UOKiK). Przedsiębiorcy, którzy zamierzają dokonać koncentracji, w określonych sytuacjach³⁷ mają obowiązek zgłosić ten zamiar Prezesowi UOKiK i powstrzymać się od jej dokonania do czasu uzyskania zgody lub upływu terminu na rozpatrzenie sprawy³⁸. Organ antymonopolowy sprawdza, czy w wyniku koncentracji przedsiębiorstw nie osiągną one pozycji dominującej³⁹. Wielkość i zmiany poziomu koncentracji na poszczególnych rynkach są też przedmiotem zainteresowań i analiz innych instytucji. W Polsce analizy poziomu koncentracji rynku ubezpieczeń prowadzi m.in. Komisja Nadzoru Finansowego sprawująca nadzór nad tym rynkiem. Ocena poziomu koncentracji i jego zmian wymaga odpowiednich mierników, do których należą wskaźniki koncentracji.

³⁶ Koncentracja (rynkowa) wyraża stopień dominacji jednego przedsiębiorstwa na rynku właściwym. Rynki właściwe obejmują najczęściej obszar jednego państwa lub tylko jego część. W takiej sytuacji proces koncentracji jest badany w obrębie gospodarek narodowych. Ze względu na postępujące procesy globalizacji, a dodatkowo we Wspólnocie Europejskiej z powodu wprowadzenia jednolitego rynku, na którym zapewnione są swobody przepływu towarów, kapitału i usług, niektóre geograficzne rynki właściwe przestają być ograniczone granicami poszczególnych państw. Mowa jest wówczas o koncentracji w wymiarze wspólnotowym.

³⁷ Przedsiębiorcy, których łączny światowy obrót przekroczył, w roku poprzedzającym rok zgłoszenia, równowartość 1 mld euro lub których łączny obrót na terytorium Polski przekroczył równowartość 50 mln euro.

³⁸ Art. 97 ust. 1 ustawy z dnia 16 lutego 2007 r. o ochronie konkurencji i konsumentów (t.j. Dz. U. z 2019 r., poz. 369).

³⁹ Komisja Europejska kontroluje koncentracje i przejęcia o wymiarze wspólnotowym, czyli takim, gdy łączne obroty w skali światowej wszystkich uczestników koncentracji wynoszą ponad 5 mld euro oraz łączne obroty w skali UE każdego z przynajmniej dwóch uczestników wynoszą ponad 250 mln euro [Wyjaśnienia w sprawie ... 2015].

3.2. Wybrane wskaźniki koncentracji

Dla potrzeb badania koncentracji rynków właściwych, w tym rynku ubezpieczeń, najczęściej stosuje się wskaźnik dyskretny (wskaźnik koncentracji k firm), wskaźnik Herfindahla-Hirschmana oraz – rzadziej – wskaźniki Pearsona i Giniego.

Na poziom koncentracji wpływają dwie wielkości: liczba przedsiębiorstw na rynku i wielkość ich udziałów w tym rynku [Matczak 2016; Kwiatkowska 2014]. Wielkość udziałów może być mierzona wielkością obrotów przedsiębiorstw, wielkością kapitału czy wielkością marży. W przypadku rynku ubezpieczeń wielkość udziałów w rynku mierzy się wartością składki przypisanej brutto zakładów ubezpieczeń⁴⁰.

Wskaźnik koncentracji k firm (wskaźnik dyskretny) jest równy sumie udziałów w rynku k największych przedsiębiorstw. Najczęściej wyznacza się ten wskaźnik dla jednego ($k = 1$), dwóch ($k = 2$), trzech ($k = 3$), czterech ($k = 4$), pięciu ($k = 5$) lub dziesięciu przedsiębiorstw ($k = 10$). Wskaźnik ten można przedstawić za pomocą wzoru:

$$CR_k = \sum_{i=1}^k p_i \quad (4.1)$$

przy czym $i = 1, \dots, k$ są rangami dla k pierwszych zakładów ubezpieczeń uporządkowanych malejąco według wielkości składki. Zakładom ubezpieczeń nadaje się numery – rangi (k) od 1 do n – określające ich pozycję w szeregu. Udziały zakładów ubezpieczeń w rynku (p_i) wyznacza się, dzieląc wysokość ich składki przypisanej brutto przez sumę składek brutto wszystkich zakładów ubezpieczeń na rynku w danym okresie, np. roku, i mnoży razy sto, aby uzyskać wynik w procentach. Przyjmując, że na rynku działa n zakładów ubezpieczeń, udział w rynku i -tego zakładu ($i = 1, 2, \dots, n$) można zapisać za pomocą wzoru jako:

$$p_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \times 100\% \quad (4.2)$$

gdzie w_i jest wartością składki przypisanej brutto i -tego zakładu ubezpieczeń.

Wskaźnik CR_k przyjmuje wartości od $(\frac{k}{n} \times 100\%)$ do 100%. Im wyższa jego wartość, tym większy udział w rynku ma k największych zakładów ubezpieczeń i większa jest koncentracja. Wskaźnik ten jest szczególnie przydatny

⁴⁰ Art. 5 ust. 3 lit. b rozporządzenia Rady (WE) nr 139/2004 z dnia 20 stycznia 2004 r. w sprawie kontroli koncentracji przedsiębiorstw (Dz. Urz. UE L 24 z 29.01.2004).

w sytuacji, gdy na rynku jest niewiele przedsiębiorstw podobnej wielkości. Wartość wskaźnika CR_1 przekraczająca 90% oznacza rynek zmonopolizowany. Taka sytuacja miała miejsce na polskim rynku ubezpieczeń na życie (Dział I) do roku 1994, gdy mimo urynkowienia systemu ubezpieczeniowego faktycznym monopolistą był zakład PZU Życie SA. Wskaźnik CR_4 wynoszący co najmniej 40% wskazuje, że na rynku występuje oligopol [Kwiatkowska 2014]. W Unii Europejskiej dla rynku ubezpieczeń przyjmuje się, że jeżeli jeden zakład ubezpieczeń posiada ponad 20% rynku, to posiada pozycję dominującą [Handsche 2009].

Przeanalizujmy stopień koncentracji polskiego rynku ubezpieczeń. Ze względu na to, że zakłady ubezpieczeń mogą prowadzić działalność ubezpieczeniową tylko w jednym dziale ubezpieczeń, koncentrację należy badać osobno dla Działu I i Działu II. W tablicy 3.1 przedstawiono wysokość składki przypisanej brutto zakładów ubezpieczeń Działu II w 2018 r. Zakłady zostały uporządkowane i porangowane od największego (o najwyższej składce) do najmniejszego. W czwartej kolumnie zostały obliczone udziały w rynku tych zakładów. Na tej podstawie można odczytać wartości wybranych wskaźników dyskretnych. Największy zakład ubezpieczeń ma 32,1% udział w rynku ($CR_1 = 32,1\%$), co oznacza, że zgodnie z przedstawionymi zasadami można go uznać za przedsiębiorstwo dominujące. Wskaźnik $CR_4 = 66,2\%$ ($32,1 + 15,1 + 13,8 + 5,2$) pokazuje, że na rynku występuje oligopol.

Tablica 3.1. Obliczenia pomocnicze do oceny koncentracji na rynku ubezpieczeń w Polsce w Dziale II w 2018 r.

Zakład ubezpieczeń	Składka przypisana brutto w tys. zł	Ranga	Udział składki w rynku (%)	Udział składki w rynku do kwadratu	Skumulowane udziały w rynku (%)
PZU SA	13 002 864	1	32,1	1032,57	32,1
ERGO HESTIA SA	6 091 976	2	15,1	226,65	47,2
WARTA S.A.	5 579 612	3	13,8	190,13	61
ALLIANZ POLSKA S.A.	2 094 015	4	5,2	26,78	66,2
AXA UBEZPIECZENIA TUiR S.A.	1 935 133	5	4,8	22,87	70,9
COMPENSA TU S.A.	1 583 701	6	3,9	15,32	74,8
GENERALI T.U. S.A.	1 453 767	7	3,6	12,91	78,4
UNIQA TU S.A.	1 200 676	8	3,0	8,80	81,4
INTERRISK TU S.A.	1 050 520	9	2,6	6,74	84

Zakład ubezpieczeń	Składka przypisana brutto w tys. zł	Ranga	Udział składki w rynku (%)	Udział składki w rynku do kwadratu	Skumulowane udziały w rynku (%)
LINK4 TU S.A.	1 025 707	10	2,5	6,43	86,5
GOTHAER TU S.A.	743 411	11	1,8	3,38	88,4
TUW TUW	635 648	12	1,6	2,47	89,9
PKO TU S.A.	586 932	13	1,5	2,10	91,4
TUW POLSKI ZAKŁAD UBEZPIECZEŃ WZAJEMNYCH	550 840	14	1,4	1,85	92,8
AVIVA TU O S.A.	442 540	15	1,1	1,20	93,9
CONCORDIA POLSKA TUW	401 619	16	1,0	0,99	94,8
TU EUROPA S.A.	296 100	17	0,7	0,54	95,6
TU EULER HERMES S.A.	286 246	18	0,7	0,50	96,3
PTR S.A.	248 302	19	0,6	0,38	96,9
TUZ TUW	200 813	20	0,5	0,25	97,4
T.U.W. POCZTOWE	184 528	21	0,5	0,21	97,8
SALTUS TUW	168 674	22	0,4	0,17	98,3
TU INTER POLSKA S.A.	128 281	23	0,3	0,10	98,6
SANTANDER AVIVA TU S.A.	119 970	24	0,3	0,09	98,9
POLSKI GAZ TUW	98 816	25	0,2	0,06	99,1
ZDROWIE S.A.	79 055	26	0,2	0,04	99,3
KUKE S.A.	77 021	27	0,2	0,04	99,5
TUW – CUPRUM	55 126	28	0,1	0,02	99,6
SIGNAL IDUNA POLSKA TU S.A.	48 307	29	0,1	0,01	99,8
NATIONALE – NEDERLANDEN TU S.A.	46 932	30	0,1	0,01	99,9
CREDIT AGRICOLE TU S.A.	21 742	31	0,1	0,00	99,9
D.A.S. S.A.	19 662	32	0,0	0,00	100
TUW MEDICUM	5 886	33	0,0	0,00	100
PARTNER S.A.	576	34	0,0	0,00	100
Razem	40 464 997	x	100,0	1563,59	x

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Biuletyn Kwartalny... 2019, Część A, tablica A14].

Kolejną miarą, która jest współcześnie wykorzystywana do badania koncentracji rynkowej, jest **wskaźnik Herfindahla-Hirschmana**, nazywany również indeksem Herfindahla-Hirschmana (HHI). Jest to podstawowa miara wykorzystywana przez organy antymonopolowe na świecie. Wskaźnik ten jest wyznaczany jako suma podniesionych do kwadratu udziałów w rynku wszystkich przedsiębiorstw. Jeśli na rynku funkcjonuje n zakładów ubezpieczeń, to wskaźnik ten można wyrazić wzorem:

$$HHI = \sum_{i=1}^n p_i^2 \quad (4.3)$$

Wskaźnik ten przyjmuje wartości z przedziału od $10\,000/n$ do $10\,000$. Według wytycznych Komisji Europejskiej rynki nieskoncentrowane to takie, dla których wskaźnik HHI wynosi poniżej 1000, umiarkowanie skoncentrowane ze wskaźnikiem między 1000 a 2000 oraz wysoce skoncentrowane ze wskaźnikiem powyżej 2000 [Wytyczne... 2004]⁴¹. W tablicy 3.1, w kolumnie 5, obliczono kwadraty udziałów w rynku zakładów ubezpieczeń Działu II. Suma tej kolumny równa 1563,39 jest jednocześnie równa wartości wskaźnika HHI. Zgodnie z regulacjami UE można uznać, że rynek ubezpieczeń w Polsce w Dziale II jest umiarkowanie skoncentrowany.

Przy zamiarze połączenia przedsiębiorstw, czyli przy zamiarze dokonania przez nie koncentracji, znaczenie ma nie tylko aktualny poziom wskaźnika HHI dla rynku, ale również jego zmiana po dokonaniu połączenia przez dane przedsiębiorstwa. Przyjmuje się przy tym założenie, że po połączeniu przedsiębiorstw udział w rynku tak powstałego przedsiębiorstwa będzie równy sumie udziałów przedsiębiorstw łączących się. Przyrost wskaźnika koncentracji, czyli tak zwana **delta HHI** (ΔHHI), w przypadku dwóch łączących się przedsiębiorstw jest równa podwojonemu iloczynowi ich udziałów w rynku, co można zapisać za pomocą wzoru jako:

$$\Delta HHI = 2 \times p_1 \times p_2 \quad (4.4)$$

gdzie p_1 oraz p_2 oznaczają udziały w rynku pierwszego i drugiego przedsiębiorstwa, które mają zamiar się połączyć. Przyrost wskaźnika koncentracji nie zależy więc od poziomu wskaźnika HHI przed połączeniem, a jedynie od udziałów łączących się przedsiębiorstw. Według wytycznych UE zagrożenie

⁴¹ Natomiast w USA do wyznaczania poziomów koncentracji przyjmuje się następujące przedziały wskaźnika: wskaźnik poniżej 1500 występuje na rynku nieskoncentrowanym, wartości z przedziału 1500–2500 opisują rynek umiarkowanie skoncentrowany, a wartości powyżej 2500 rynek wysoce skoncentrowany [Horizontal Mergers... 2010].

konkurencyjności na rynku ma miejsce wówczas, gdy po połączeniu wskaźnik koncentracji HHI wynosi od 1000 do 2000, zaś delta wynosi co najmniej 250, lub w przypadku kiedy wskaźnik HHI po połączeniu wynosi powyżej 2000, a delta powyżej 150 [Wytyczne... 2004]⁴². Badanie poziomów i przyrostów wskaźnika HHI jest zwykle pierwszym etapem działań organów monopolowych, który pozwala wykryć problem z konkurencyjnością na rynku i pomaga w podjęciu decyzji, czy konieczne jest podjęcie dalszych czynności przez organy antymonopolowe.

Jako przykład przeanalizujmy czysto hipotetyczną sytuację, jak zmieniłyby się wskaźnik HHI, gdyby na współczesnym polskim rynku ubezpieczeń łączyły się dwa największe zakłady, a jak ta zmiana wyglądałaby w przypadku połączenia największego z najmniejszym zakładem (por. dane z tablicy 3.1)⁴³. Gdyby doszło do połączenia dwóch największych zakładów, wskaźnik HHI wzrósłby o 969,42 punktów ($32,1\% \times 15,1\% \times 2$), czyli osiągnąłby poziom 2533,01 punktów. Wzrost wskaźnika o ponad 250 punktów byłby przesłanką do podjęcia kontroli, a dodatkowo wartość HHI po połączeniu przedsiębiorstw przekroczyłaby 2000 punktów. Natomiast gdyby największy zakład łączył się z najmniejszym, to delta HHI wyniosłaby 0,06 punktów ($32,1\% \times 0,001\% \times 2$)⁴⁴, a wskaźnik HHI osiągnąłby poziom 1563,65. Zmiana wskaźnika, ani jego poziom po połączeniu, nie są więc w tym przypadku przesłankami do podjęcia działań w zakresie ochrony konkurencji. Na wskaźnik HHI największy wpływ mają przedsiębiorstwa o największym udziale w rynku, natomiast wpływ małych przedsiębiorstw jest marginalny. Dlatego też wskaźnik HHI nie wykazuje zmian, gdy do rynku dołączają małe przedsiębiorstwa (np. nowo powstające) lub go opuszczają.

⁴² Natomiast w USA zmiany wskaźnika HHI mniejsze niż 100 uważane są za niezagrażające konkurencyjności na rynku, zmiany wskaźnika powyżej 100 punktów na rynkach umiarkowanie lub silnie skoncentrowanych ($HHI > 1500$) budzą poważne obawy dotyczące konkurencji i często wymagają kontroli. Dodatkowo domniemywa się, że wzrost wskaźnika o ponad 200 punktów na rynkach silnie skoncentrowanych ($HHI > 2500$) zwiększa siłę rynkową połączonych przedsiębiorstw. Domniemanie to można obalić przekonującymi dowodami wskazującymi, że połączenie prawdopodobnie nie wzmocni siły rynkowej [Horizontal Mergers..., 2010].

⁴³ Należy jednak pamiętać, że jest to przykład ściśle teoretyczny i nie ma żadnego związku z sytuacją rynkową.

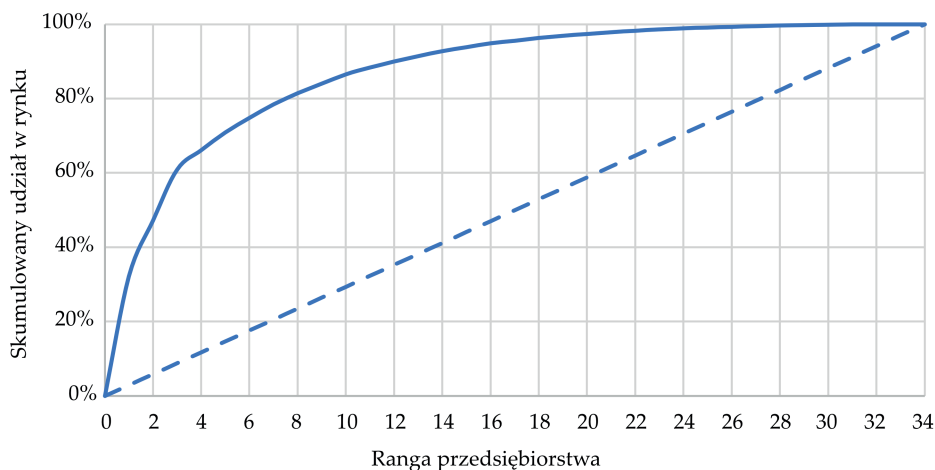
⁴⁴ W tablicy 3.1 przedstawiono udział w rynku z dokładnością do promila. W wyniku zaokrągleń udział w rynku najmniejszych zakładów został przedstawiony jako 0,0%. Są to jednak wielkości większe od zera. W celu pokazania przeprowadzonych obliczeń zwiększono dokładność zapisu do części tysięcznych procentu.

3.3. Krzywe koncentracji

Graficznymi metodami oceny koncentracji rynkowej są **krzywe koncentracji**. Pokazują one stopień odchylenia rozkładu udziałów w rynku wszystkich przedsiębiorstw od rozkładu równomiernego. Rozkład równomierny to taki, w którym udział w rynku każdego przedsiębiorstwa jest taki sam, czyli jeżeli na rynku działa n przedsiębiorstw, to każde z nich ma udział wynoszący $\frac{1}{n} \times 100\%$. Krzywe mogą być wyznaczone na jeden z dwóch sposobów. Pierwszy sposób wymaga uporządkowania przedsiębiorstw malejąco według udziału w rynku i ich porangowania od 1 do n . Dla tak uporządkowanych przedsiębiorstw wyznacza się narastająco (tj. dla pierwszego przedsiębiorstwa, pierwszych dwóch, pierwszych trzech itd.) ich skumulowany udział w rynku (por. kolumna 6 w tablicy 3.2). W prostokątnym układzie współrzędnych wyznacza się punkty o współrzędnych wyznaczonych przez pozycje kolejnych przedsiębiorstw (na osi odciętych) oraz skumulowane udziały w rynku na osi rzędnych.

Krzywa koncentracji dla rynku ubezpieczeń w Dziale II w 2018 r. została przedstawiona na rysunku 3.1 (linia ciągła). W przypadku równomiernego rozkładu udziałów punkty układałyby się wzdłuż prostej oznaczonej linią przerywaną. W Dziale II rynku ubezpieczeń w 2018 r. działały 34 zakłady ubezpieczeń, stąd na osi odciętych znalazły się rangi od 1 (dla największego zakładu ubezpieczeń) do 34 dla najmniejszego zakładu (kolumna 3 w tablicy 3.1). Na osi rzędnych zaznaczone są skumulowane udziały w rynku (kolumna 6 w tablicy 3.1). Im większe odchylenie krzywej koncentracji od linii równomiernego podziału, tym większy stopień koncentracji rynku. Krzywa dla rynku ubezpieczeń mocno odchyła się od linii równomiernego podziału, wskazując na znaczną koncentrację rynku.

Drugi sposób wyznaczania krzywej koncentracji wymaga uporządkowania przedsiębiorstw rosnąco według udziału w rynku i ich porangowania (kolumna 3 w tablicy 3.2). Skumulowany odsetek liczby przedsiębiorstw obliczany jest jako wyrażony procentowo iloraz rangi przedsiębiorstwa i maksymalnej rangi ($k/n \times 100$) (kolumna 4 w tablicy 3.2). Skumulowany udział w rynku obliczany jest narastająco jako suma udziałów w rynku uporządkowanych rosnąco przedsiębiorstw (kolumna 5 w tablicy 3.2). Krzywą koncentracji wyznacza się dla skumulowanych odsetków przedsiębiorstw (oś pozioma) i skumulowanych udziałów w rynku (oś pionowa). Tak skonstruowana krzywa jest nazywana krzywą Lorenza. Na rysunku 3.2 przedstawiono krzywą Lorenza dla Działu II rynku ubezpieczeń w 2018 r.



Rysunek 3.1. Krzywa koncentracji rynku ubezpieczeń (Dział II) w Polsce w 2018 r.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z tablicy 3.1.

Tablica 3.2. Obliczenia pomocnicze do wyznaczania krzywych koncentracji na rynku ubezpieczeń w Polsce w Dziale II w 2018 r.

Zakład ubezpieczeń	Udział w rynku (%)	Ranga (pozycja)	Skumulowany odsetek zakładów (%)	Skumulowane udziały w rynku (%)
PARTNER S.A.	0,0	1	2,9	0,0
TUW MEDICUM	0,0	2	5,9	0,0
D.A.S. S.A.	0,0	3	8,8	0,1
CREDITAGRICOLE TU S.A.	0,1	4	11,8	0,1
NATIONALE – NEDERLANDENTUS.A.	0,1	5	14,7	0,2
SIGNALIDUNAPOLSKATUS.A.	0,1	6	17,6	0,4
TUW –CUPRUM	0,1	7	20,6	0,5
KUKES.A.	0,2	8	23,5	0,7
ZDROWIE S.A.	0,2	9	26,5	0,9
POLSKIGAZTUW	0,2	10	29,4	1,1
SANTANDER AVIVA TU S.A.	0,3	11	32,4	1,4
TU INTERPOLSKA S.A.	0,3	12	35,3	1,7
SALTUS TUW	0,4	13	38,2	2,2
T.U.W. POCZTOWE	0,5	14	41,2	2,6
TUZ TUW	0,5	15	44,1	3,1
PTR S.A.	0,6	16	47,1	3,7

Tablica 3.2. cd.

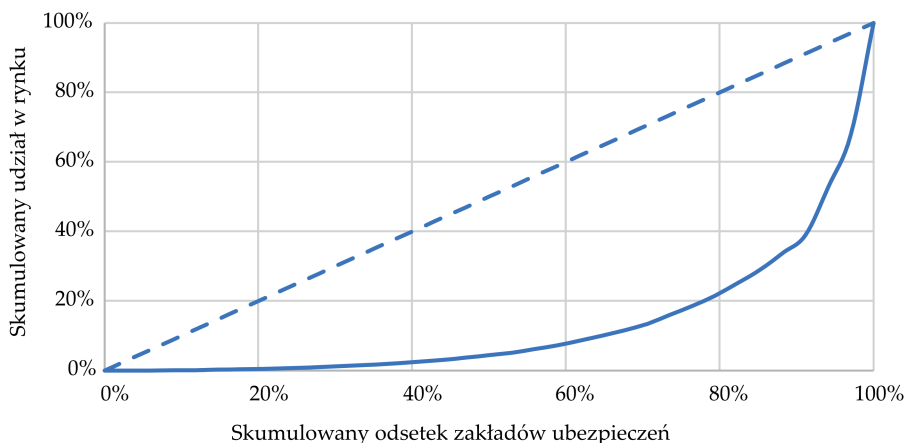
Zakład ubezpieczeń	Udział w rynku (%)	Ranga (pozycja)	Skumulowany odsetek zakładów (%)	Skumulowane udziały w rynku (%)
TU EULERHERMES S.A.	0,7	17	50,0	4,4
TU EUROPA S.A.	0,7	18	52,9	5,2
CONCORDIA POLSKA TUW	1,0	19	55,9	6,1
AVIVA TUO S.A.	1,1	20	58,8	7,2
TUW POLSKI ZAKŁAD UBEZPIECZEŃ WZAJEMNYCH	1,4	21	61,8	8,6
PKO TU S.A.	1,5	22	64,7	10,1
TUW TUW	1,6	23	67,6	11,6
GOTHAER TU S.A.	1,8	24	70,6	13,5
LINK4 TU S.A.	2,5	25	73,5	16,0
INTERRISK TU S.A.	2,6	26	76,5	18,6
UNIQA TU S.A.	3,0	27	79,4	21,6
GENERALI T.U. S.A.	3,6	28	82,4	25,2
COMPENSA TU S.A.	3,9	29	85,3	29,1
AXA UBEZPIECZENIA TUiR S.A.	4,8	30	88,2	33,8
ALLIANZ POLSKA S.A.	5,2	31	91,2	39,0
WARTA S.A.	13,8	32	94,1	52,8
ERGOHESTIA SA	15,1	33	97,1	67,9
PZU SA	32,1	34	100,0	100,0
Razem	100,0	x	x	x

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Biuletyn Kwartalny 2019, Część A, tablica A14].

Należy zauważyć, że krzywa koncentracji wyznaczana jest zawsze powyżej linii równomiernego podziału (por. rys. 3.1), natomiast krzywa Lorenza poniżej linii równomiernego podziału (rys. 3.2). Na obu krzywych relacja pól powierzchni figury między krzywą a linią równomiernego podziału do pola trójkąta wyznaczonego między linią równomiernego podziału i osią odciętych jest taka sama. Relacja ta jest podstawą wyznaczania wielu współczynników koncentracji, z czego najpopularniejsze to **współczynnik Giniego** i **współczynnik koncentracji Pearsona**. Oba współczynniki przyjmują wartości od 0 do 1, gdzie 0 oznacza zupełny brak koncentracji (krzywa koncentracji pokrywa się z linią równomiernego podziału), a 1 oznacza absolutną koncentrację (jeden przedsiębiorca jest monopolistą ze 100% udziałem w rynku)⁴⁵. Współczynnik koncentracji Pearsona dla Działu II rynku ubezpieczeń w roku 2018 wynosi

⁴⁵ Sposoby wyznaczania obu współczynników można znaleźć m.in. w: [Balicki, Wycinka 2003].

0,74. Potwierdza to obserwację wykresu krzywych, że rynek ten jest dość silnie skoncentrowany.



Rysunek 3.2. Krzywa Lorenza dla rynku ubezpieczeń (Dział II) w Polsce w 2018 r.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z tablicy 3.1.

Położenie krzywej koncentracji oraz wartości współczynników koncentracji zależą od liczby przedsiębiorstw na rynku. Im większa liczba przedsiębiorstw, tym krzywa koncentracji leży dalej od linii równomiernego podziału i wyższe wartości przyjmują współczynniki koncentracji. Jeśli więc na rynku pojawiają się nowe, małe przedsiębiorstwa, które nie uszczuplają znacznie udziałów w rynku przedsiębiorstw największych, to mimo iż sytuacja taka świadczy o wzroście konkurencyjności takiego rynku, krzywe koncentracji i oparte o nie współczynniki będą wskazywać wzrost koncentracji. Zjawisko to można było obserwować w latach 90. ubiegłego wieku, gdy dopiero kształtował się polski rynek ubezpieczeń [por. *Biuletyn Państwowego Nadzoru Ubezpieczeń...* 2003].

Literatura na temat koncentracji rynkowej jest bardzo obszerna⁴⁶. Analizy koncentracji rynku ubezpieczeń w Polsce są prezentowane m.in. w: [Balicki, Wycinka 2003; Handschke 2009]. Porównania międzynarodowe koncentracji na rynkach ubezpieczeniowych przedstawiono m.in. w pracy [Kramaric, Kitic 2012].

⁴⁶ Przegląd innych wskaźników stosowanych do badania koncentracji rynków zawarty jest m.in. w pracach [Bikker, Haaf 2002; Dubejko 2007].

Po przeczytaniu tego rozdziału Czytelnik powinien:

- rozumieć znaczenie pojęcia koncentracja rynkowa,
- znać podstawowe mierniki koncentracji,
- potrafić ocenić stopień i zmiany koncentracji rynkowej na podstawie analizy wartości mierników koncentracji i położenia krzywych koncentracji,
- potrafić ocenić stopień koncentracji rynku ubezpieczeń w Polsce.

Pytania sprawdzające

1. Wykorzystując dane publikowane przez Komisję Nadzoru Finansowego, wyznaczyć następujące wskaźniki koncentracji: wskaźnik dyskretny dla $k = 1, 2$ i 4 zakładów, wskaźnik Herfindahla-Hirschmana, wskaźnik koncentracji Pearsona oraz narysować krzywą koncentracji dla Działu I rynku ubezpieczeń w roku 2018. Porównując uzyskane wyniki z wynikami przedstawionymi w tym rozdziale dla Działu II, ocenić, który dział ubezpieczeń charakteryzuje się wyższą koncentracją.
2. Tablica 3.3 przedstawia wartości wybranych miar koncentracji dla Działu I rynku ubezpieczeń w latach 1995–2002. Na podstawie tych mierników ocenić zmiany w stopniu koncentracji rynku. Dlaczego zmiany wartości wskaźnika HHI i współczynnika Pearsona zachodzą w różnych kierunkach?

Tablica 3.3. Wybrane wskaźniki koncentracji Działu I rynku ubezpieczeń w Polsce w latach 1995–2002

Rok	Wskaźnik koncentracji			
	CR_1 (%)	CR_5 (%)	HHI	Pearsona
1995	87	99,45	7670	0,877
1996	77	98,99	6140	0,881
1997	69	98,83	5140	0,902
1998	64	98,06	4500	0,921
1999	56	96,08	3755	0,912
2000	53	93,45	3373	0,924
2001	51	91,94	3166	0,922
2002	49	88,69	2970	0,917

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Balicki, Wycinka 2003].

3. Omówić, jakich zmian co do kierunku i natężenia należy oczekiwać w wartościach wskaźników: CR_5 , HHI oraz Pearsona, gdy dochodzi do połączenia:
- a) dwóch największych przedsiębiorstw,
 - b) jednego z największych przedsiębiorstw z małym przedsiębiorstwem,
 - c) dwóch bardzo małych przedsiębiorstw.

Rozdział 4

Współzależność zmiennych

Teresa Plenikowska-Ślusarz

Hasła: *korelacja dodatnia, korelacja ujemna, współczynnik korelacji liniowej Pearsona, współczynniki korelacji rang, współczynnik kontyngencji*

4.1. Korelacja cech ilościowych

W rozdziałach 1 i 2 przedstawiono opis struktury zbiorowości z punktu widzenia jednej cechy. Badania statystyczne często dotyczą wielu cech (wielu zmiennych)⁴⁷ charakteryzujących badaną populację. Zjawiska gospodarcze i społeczne są ze sobą powiązane, kształtują się pod wpływem pewnych zjawisk, a i same wywierają wpływ na inne. Między zmiennymi (zjawiskami) mogą występować zależności o charakterze przyczynowo-skutkowym⁴⁸ (wpływy ze składek i wysokość dochodów zakładów ubezpieczeń) bądź tylko podobieństwo zachowania i współwystępowanie (wysokość składek i wysokość wypłaconych odszkodowań)⁴⁹. Zachodzi zatem potrzeba badania ich łącznie.

Celem analizy współzależności, czyli analizy korelacji, jest stwierdzenie, czy między badanymi zmiennymi zachodzą jakieś zależności, jaka jest ich siła, jaka jest ich postać i kierunek. Statystyka dysponuje wieloma miarami opisu związku między dwiema lub większą liczbą cech. Korelację między dwiema cechami nazywamy prostą. I taka będzie przedmiotem analizy w niniejszym opracowaniu. W przypadku większej liczby cech mówimy o korelacji

⁴⁷ Nazwa cecha lub inaczej zmienna stosowane są do określenia cech zmiennych (por. rozdział 1).

⁴⁸ O przyczynowości piszą m.in. [Schutt, O'Neil 2014].

⁴⁹ Może występować również korelacja pozorna, czyli zjawisko dostrzegania relacji między zmiennymi (zdarzeniami lub zachowaniami), gdy faktycznie nie ma między nimi związku. Liczne przykłady korelacji pozornej zob. [<http://www.tylervigen.com/spurious-correlations>].

wielorakiej (związku pomiędzy jedną zmienną a wieloma zmiennymi łącznie) lub cząstkowej (informującej o związku dwóch cech z wyłączeniem pozostałych). Sposób doboru miary zależy między innymi od rodzaju skali pomiaru⁵⁰ badanych zmiennych.

Współczynnik korelacji liniowej Pearsona

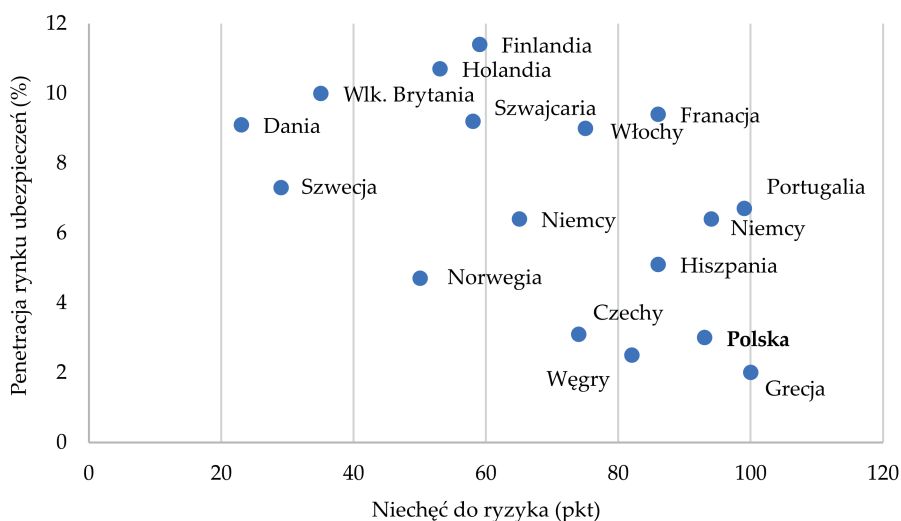
W przypadku cech ilościowych (mierzalnych) wyrażonych w skali ilorazowej dane dotyczące dwóch zmiennych często przedstawiane są w formie szeregów szczegółowych. Sposób przeprowadzenia analizy korelacji zaprezentowano w przykładach 4.1, 4.2 i 4.3.

Przykład 4.1

Celem ubezpieczeń jest kompensacja finansowych skutków negatywnych zdarzeń. To, w jakim stopniu ta metoda jest wykorzystywana w społeczeństwie można zmierzyć za pomocą tzw. wskaźnika penetracji rynku, liczonego jako stosunek wysokości składek brutto opłacanych w ciągu roku do PKB. Skłonność do ubezpieczania się jest skorelowana z niechęcią do ryzyka, rozumianą jako unikanie niepewności⁵¹. Społeczeństwa, w których niechęć do ryzyka jest mniejsza (większa chęć podejmowania działań), częściej się ubezpieczają. Spadek wartości jednej cechy powoduje przeciętnie wzrost wartości drugiej. W statystyce zależność taką nazywamy **korelacją ujemną**. Kierunek i siła związku stają się bardziej czytelne, gdy oceniamy je na podstawie wykresu korelacyjnego. Zależność między niechęcią do ryzyka wśród mieszkańców Europy (w pkt) a penetracją rynku ubezpieczeniowego (w proc. PKB) w 2015 r. przedstawia rysunek 4.1.

⁵⁰ Pomiar cech zmiennych może być wyrażony w różnej skali. W przypadku cech niemierzalnych w skali nominalnej (możliwa wyłącznie klasyfikacja: zawód, płeć, numer statystyczny przedsiębiorstwa) lub porządkowej (możliwe porządkowanie elementów bez możliwości określenia odległości między nimi: poziom wykształcenia, jakość usług (dobra, średnia, zła), zdolność kredytowa (mała, średnia, duża)). W przypadku cech mierzalnych w skali przedziałowej (ustalona stała wzorcowa różnica jako jednostka porównań między elementami: temperatura, iloraz inteligencji, zdolność kredytowa (w skali 0–10)) lub stosunkowej (możliwe oznaczenie odległości od naturalnego początku: wysokość składki, wysokość odszkodowania, czas oczekiwania na wypłacenie odszkodowania).

⁵¹ Według Hofstede wysoki stopień niepewności oznacza m.in. niechęć do podejmowania ryzyka, opór do zmian, niechęć do wprowadzania innowacji [por. <http://geert-hofstede.com>].



Rysunek 4.1. Niechęć do ryzyka w krajach Europy (w pkt) a penetracja rynku ubezpieczeniowego (proc. PKB) w 2015 r.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: *[Jak ubezpieczenia zmieniają Polskę i Polaków 2017, s. 6 –7]*.

Z przedstawionej zależności wynika, że Polacy – podobnie jak Grecy, Portugalczycy i Niemcy – nie są skłonni podejmować ryzyka, mają wysoką niechęć do ryzyka (punkty na wykresie ułożone z prawej strony). Podobnie jak Czesi, Węgrzy i Grecy rzadziej się ubezpieczają (punkty na wykresie znajdują się nisko). Natomiast ci, którzy nie boją się niepewności i są skłonni podejmować ryzyko, jednocześnie dosyć często korzystają z komercyjnych ubezpieczeń. Są to mieszkańcy Dani, Szwecji i Wielkiej Brytanii (punkty położone wysoko po lewej stronie wykresu). Punkty na wykresie są rozrzucone, nie skupiają się wzdłuż linii, zatem w przedstawionej sytuacji nie ma silnej zależności. Na podstawie wykresu korelacyjnego (wykresu rozrzutu) występującą zależność można ocenić jako zbliżoną do liniowej. Należy zauważyć, że nie występują wartości odstające (nietypowe, skrajne), czego potwierdzeniem jest również umiarkowana dyspersja obu zmiennych (współczynniki zmienności wynoszą 35% i 43% odpowiednio dla niechęci do ryzyka i penetracji rynku). Analiza wykresu korelacyjnego jest pierwszym i najważniejszym etapem badania zależności. Wnioski z wykresu gwarantują zarówno prawidłowy dobór miary, jak i ocenę uzyskanego wyniku (wpływ wartości odstających, niejednorodności zbiorowości).

Odpowiednią miarą służącą do oceny natężenia korelacji w przedstawionej sytuacji jest **współczynnik korelacji liniowej Pearsona** (r)⁵². Współczynnik ten przyjmuje wartości z przedziału $<-1; +1>$. Znak współczynnika informuje o kierunku korelacji, zaś jego wartość bezwzględna o sile związku. W analizach statystycznych zwykle przyjmuje się, że jeżeli bezwzględna wartość współczynnika wynosi:

- mniej niż 0,2 – oznacza brak związku liniowego między badanymi cechami,
- 0,2–0,4 – oznacza niską zależność liniową,
- 0,4–0,7 – oznacza zależność liniową umiarkowaną,
- 0,7–0,9 – oznacza zależność liniową wysoką, znaczącą,
- powyżej 0,9 – oznacza zależność bardzo silną.

Wartości ± 1 informują o istnieniu linowego związku funkcyjnego, czyli przyporządkowania konkretnym wartościom jednej zmiennej określonych wartości drugiej. Wartość bliska 0 nie oznacza zawsze braku zależności między cechami, a może oznaczać jedynie brak związku liniowego. Uzyskany w analizowanym przykładzie wynik $r = -0,5821$ potwierdza występowanie umiarkowanej korelacji ujemnej.

Współczynnik korelacji podniesiony do kwadratu nazywamy **współczynnikiem determinacji** (R^2), czyli współczynnikiem informującym, jaka część zmienności jednej z cech jest wyjaśniona kształtowaniem się drugiej cechy. W omawianym przykładzie wartość współczynnika determinacji równa $R^2 = 0,3388$ oznacza, że w około 34% zmienność penetracji rynku ubezpieczeń jest związana z niechęcią mieszkańców danego państwa do ryzyka, natomiast około 66% zmienności jest wywołane wpływem innych czynników nieuwzględnionych w badaniu.

Na wartość współczynnika korelacji liniowej Pearsona, podobnie jak na wartość średniej arytmetycznej, mają wpływ wartości skrajne. Sytuację taką przedstawiono w przykładzie 4.2.

Przykład 4.2

Głównym źródłem przychodów zakładów ubezpieczeń są składki ubezpieczeniowe, które muszą pokryć co najmniej wysokość spodziewanych odszkodowań i koszty funkcjonowania. Dane dotyczące wysokości składek

⁵² Istotę współczynnika korelacji liniowej Pearsona ukazuje wzór:
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

W praktyce do obliczeń wykorzystuje się funkcje np. w Excelu. Szerzej o warunkach stosowania, własnościach i sposobie liczenia m.in. w: [Aczel 2017; Lissowski, Haman, Jasiński 2008; Kot, Jakubowski, Sokołowski 2007; Makać, Urbanek-Krzysztofiak 2008; Nawojczyk 2004; Starzyńska 2008; Wieczorkowska, Kocharński, Eljaszuk 2004].

przypisanych brutto (w tys. zł) oraz wysokości odszkodowań i świadczeń wypłaconych brutto (w tys. zł) w Dziale I dziesięciu największych ubezpieczycieli w Polsce w 2017 r. przedstawia tablica 4.1 i rysunek 4.2.

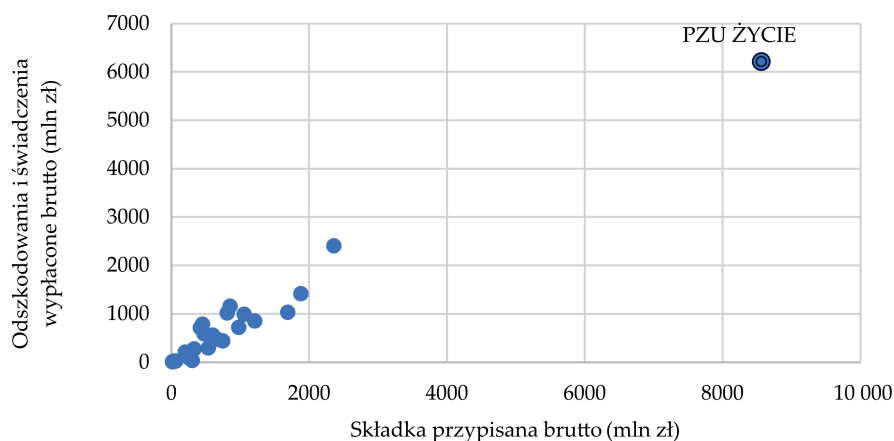
Tablica 4.1. Wysokość składek przypisanych brutto (w tys. zł) oraz odszkodowań i świadczeń wypłaconych brutto (w tys. zł) w Dziale I największych ubezpieczycieli w Polsce w 2017 r. oraz przypisane im pozycje

Ubezpieczyciel	Składka przypisana brutto w tys. zł	Odszkodowania i świadczenia wypłacone brutto w tys. zł	Pozycja (ranga) ubezpieczyciela według	
			składki przypisanej brutto	wypłaconego odszkodowania i świadczenia
PZU ŻYCIE SA	8 563 066	6 209 076	1	1
OPEN LIFE SA	2 354 130	2 408 435	2	2
AVIVA ŻYCIE SA	1 879 343	1 416 132	3	3
NATIONALE NEDERLANDEN SA	1 687 058	1 028 555	4	5
EUROPA ŻYCIE SA	1 205 408	854 050	5	8
AXA ŻYCIE SA	1 053 531	991 506	6	7
GENERALI ŻYCIE SA	974 903	718 822	7	9
METLIFE TUnŻ SA	850 401	1 157 897	8	4
WARTA TUnŻ SA	805 830	1 021 058	9	6
UNIQA ŻYCIE SA	744 894	437 953	10	10

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Raport roczny PIU 2017].

Ubezpieczyciele o wysokim zbiorze składki mieli jednocześnie wysokie wypłaty z tytułu odszkodowań i należnych świadczeń, między zmiennymi występuje **korelacja dodatnia**. Na wykresie korelacyjnym wyraźnie widać jednostkę (PZU), której wartości badanych zmiennych znacząco odbiegają od wartości w pozostałych firmach. Wartość współczynnika korelacji liniowej Pearsona w przedstawionym zbiorze danych wynosi $r = 0,9846$. Uzyskany wynik mógłby sugerować, że wysokość odszkodowań jest niemal zupełnie zdeterminowana wysokością składek. Tak wysoki wynik wskaźnika jest jedynie konsekwencją podatności zastosowanej miary na wartości odstające. U badanych ubezpieczycieli, z pominięciem PZU, średnia wysokość składek brutto wynosiła 1284 mln zł, zaś średnia wysokość odszkodowań i świadczeń wypłaconych brutto to 1115 mln zł, wartość współczynnika zmienności odpowiednio 41% i 47%. W PZU ŻYCIE SA łączna wysokość składek przypisanych brutto wynosiła 8563 mln zł, zaś wysokość odszkodowań i świadczeń

wypłaconych brutto 6209 mln zł. Z uwzględnieniem wartości PZU ŻYCIE SA średnia wartość składek ubezpieczyciela wzrasta do 2012 mln zł, a średnia wysokość odszkodowań do 1624 mln zł, następuje również znaczny wzrost natężenia dyspersji, współczynniki zmienności wzrastają do około 100%.



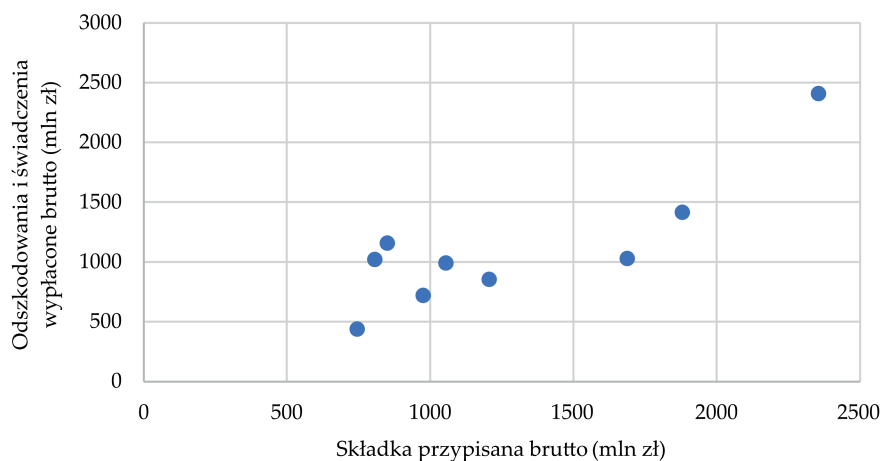
Rysunek 4.2. Wysokość składek przypisanych brutto (w mln zł) oraz odszkodowań i świadczeń wypłaconych brutto (w mln zł) w Dziale I największych ubezpieczycieli w Polsce w 2017 r.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Raport roczny PIU 2017].

Jeżeli w badaniu występują wartości skrajne (nietypowe, odstające), zazwyczaj stosowane jest jedno z dwóch możliwych rozwiązań⁵³. Jednostkę, której przypisane są wartości odstające, można pominąć w badaniu. Jest to zasadne jedynie wówczas, gdy uznamy sytuację obserwowaną w eliminowanej jednostce za nietypową w stosunku do pozostałych. Innym rozwiązaniem jest zastosowanie odpowiednich dla takiej sytuacji miar. W przypadku oceny współzależności współczynnika korelacji rang Spearmana lub Kendalla.

Na rysunku 4.3 przedstawiono wysokość składek przypisanych brutto (w mln zł) oraz odszkodowań i świadczeń wypłaconych brutto (w mln zł) w Dziale I największych ubezpieczycieli z pominięciem PZU ŻYCIE SA w Polsce w 2017 r.

⁵³ O odrzucaniu obserwacji odstających i selektywnym wykorzystywaniu danych szerzej m.in. [Rao 1994].



Rysunek 4.3. Wysokość składek przypisanych brutto (w mln zł) oraz odszkodowań i świadczeń wypłaconych brutto (w mln zł) w Dziale I największych ubezpieczycieli (z pominięciem PZU ŻYCIE SA) w Polsce w 2017 r.

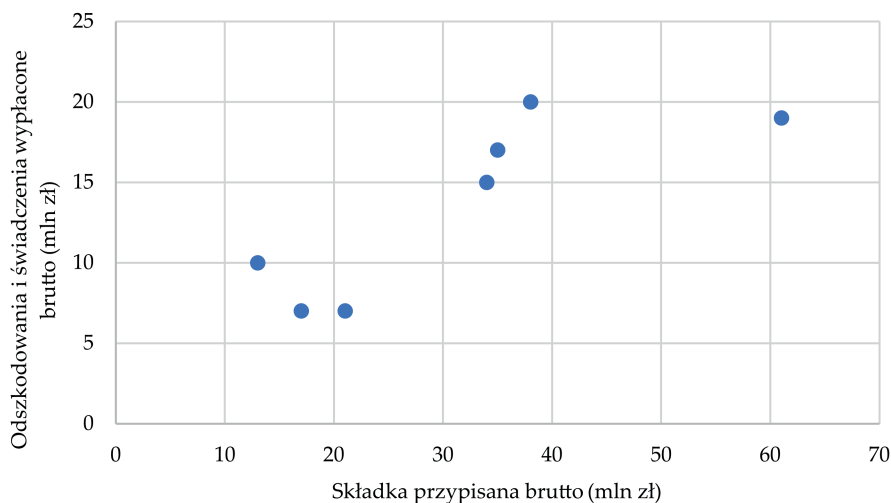
Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Raport roczny PIU 2017].

Na podstawie wykresu korelacyjnego występującą zależność można ocenić jako zbliżoną do liniowej, nie występują wartości odstające, czego potwierdzeniem jest również umiarkowana dyspersja obu zmiennych. Wartość współczynnika korelacji liniowej Pearsona wynosi $r = 0,8358$, co świadczy o znacznej sile związku.

Istotnym problemem, nie tylko w analizie zależności, może być brak jednorodności badanych zjawisk. Zbiorowość jest jednorodna wtedy, gdy wszystkie jej elementy pozostają pod wpływem działania tych samych przyczyn głównych. Pod wieloma względami zakłady ubezpieczeń mogą nie tworzyć zbiorowości jednorodnej, inaczej na zmiany na rynku reagują małe a inaczej duże firmy. Badanie zależności w przypadku zbiorowości niejednorodnych prowadzi do mylnej oceny szczególnie natężenia korelacji. Jako przykład posłuży porównanie współczynnika korelacji między wysokością składek przypisanych brutto a wysokością odszkodowań i świadczeń wypłaconych brutto uzyskanego dla największych ubezpieczycieli z oceną stopnia zależności u najmniejszych ubezpieczycieli w przykładzie 4.3.

Przykład 4.3

Na rysunku 4.4 przedstawiono dane dotyczące wysokości składek przypisanych brutto (w mln zł) oraz wysokości odszkodowań i świadczeń wypłaconych brutto (w mln zł) w Dziale I najmniejszych ubezpieczycieli ubezpieczeniowych w Polsce w 2017 r. (CONCORDIA CAPITAL SA, SALTUS ŻYCIE SA, SIGNAL IDUNA ŻYCIE SA, POCZTOWE ŻYCIE SA, MACIF ŻYCIE TUW, REJENT LIFE TUW, INTER – ŻYCIE SA).



Rysunek 4.4. Wysokość składek przypisanych brutto (w mln zł) oraz odszkodowań i świadczeń wypłaconych brutto (w mln zł) w Dziale I najmniejszych ubezpieczycieli w Polsce w 2017 r.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Raport roczny PIU 2017].

Wartość współczynnika korelacji liniowej Pearsona wynosi $r = 0,5715$. Natężenie związku między badanymi cechami jest umiarkowane. W tej grupie ubezpieczycieli około 64% zmienności wypłaconych odszkodowań i świadczeń nie jest związana z wielkością uzyskanej składki przypisanej brutto. Sytuacja jest zatem inna od przedstawionej w przykładzie 4.2 dotyczącym największych ubezpieczycieli Działu I.

Współczynniki korelacji rang

Współczynniki korelacji rang Spearmana i Kendalla⁵⁴ są nieparametrycznymi odpowiednikami współczynnika korelacji liniowej Pearsona. Znajdują zastosowanie głównie tam, gdzie współczynnik korelacji liniowej Pearsona nie może lub nie powinien być stosowany, czyli do oceny korelacji krzywoliniowej, a także w przypadku występowania wartości odstających. Do obliczania ich wartości wykorzystuje się rangi (pozycje) każdej jednostki w relacji do pozostałych. Wartości najwyższej przypisujemy pozycję pierwszą⁵⁵, kolejnej drugą itd. (tab. 4.1). Na pozycję nie ma wpływu to, czy kolejna wartość jest trochę czy wielokrotnie niższa. Współczynniki korelacji rang to miary unormowane, przyjmują wartości z przedziału $\langle -1; +1 \rangle$ i podobnie jak współczynnik korelacji liniowej Pearsona informują o sile (wartość bezwzględna) i kierunku korelacji (znak).

W przykładzie 4.2 występowała jednostka o wartościach odstających i wartość współczynnika korelacji liniowej Pearsona wynosiła $r = 0,9846$. Natomiast wartość współczynnika korelacji rang Spearmana $\rho = 0,7576$. Zastosowanie do oceny współczynnika korelacji rang Kendalla dałoby inny wynik: $\tau_b = 0,6444$. Oba wskaźniki informują o znacznej, ale nie bardzo silnej korelacji dodatniej. W analizach statystycznych wykorzystujemy wyłącznie jedną z miar. Należy pamiętać, aby w analizach porównawczych wykorzystywać te same wskaźniki.

4.2. Współzależność cech jakościowych

Chcąc ocenić współzależność między cechami jakościowymi wyrażonymi w skali nominalnej (np. płeć i subiektywna ocena wystąpienia danego ryzyka) lub cechą jakościową i ilorazową (np. poziom wykształcenia a liczba posiadanych polis), które przedstawione są w formie tablicy wielodzieldowej – tzw. tablicy kontyngencji, posługujemy się miernikami zwanymi **współczynnikami kontyngencji**, oceniającymi stopień skojarzenia cech⁵⁶. Tablicę wielodzieldową przedstawia przykład 4.4.

⁵⁴ Szerzej o warunkach stosowania, własnościach i sposobie liczenia m.in. [Lissowski, Haman, Jasiński 2008; Makać, Urbanek-Krzysztofiak 2008; Starzyńska 2008].

⁵⁵ Możemy numer jeden przyporządkować wartości najniższej. Ważne, by obie zmienne porangować w taki sam sposób.

⁵⁶ Warunki stosowania i sposoby liczenia przedstawiają m.in. [Aczel 2017; Makać, Urbanek-Krzysztofiak 2008; Nawojczyk 2004; Wieczorkowska, Kocharński, Eljaszuk 2004].

Przykład 4.4

CBOS przeprowadził badanie wśród osób deklarujących, że nie pobierają emerytury ani renty z tytułu niezdolności do pracy, odnośnie do wyboru między pracą do 60 (kobiety) lub 65 roku życia (mężczyźni) i niższym świadczeniem emerytalnym a przejściem na emeryturę w późniejszym wieku i wyższym świadczeniem w przyszłości. Wyniki badania przeprowadzonego w 2017 r. przedstawia tablica 4.2.

Tablica 4.2. Decyzja przejścia na wcześniejsza emeryturę a płeć

Decyzja	Kobiety	Mężczyźni	Razem
Praca do 60/65 roku życia i niższe świadczenie emerytalne	170	190	360
Przejście na emeryturę w późniejszym wieku i wyższe świadczenie w przyszłości	163	151	314
Trudno powiedzieć	54	46	100
Razem	387	387	774

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: [Oceny działalności instytucji publicznych 2017, s. 7].

W tej części badania uczestniczyły łącznie 774 osoby (n). Informacje zostały zestawione w dwóch kolumnach – liczba wariantów cechy Płeć oraz w trzech wierszach – liczba wariantów cechy Decyzja. O rozkładach badanych cech (płci i decyzji) informują tzw. rozkłady brzegowe (znajdujące się w ostatnim i wierszu w ostatniej kolumnie). Liczebności w ostatnim wierszu informują o strukturze badanych według płci. Wynika z nich, że liczba kobiet była taka sama jak liczba mężczyzn i wynosiła 387 osób. Liczebności ostatniej kolumny to rozkład decyzji. Większość respondentów zdecydowałaby się na pracę do 60/65 roku życia i niższe świadczenie emerytalne (360/774). Liczebności wewnątrz tablicy dotyczą dwóch cech łącznie⁵⁷. Liczba 170 oznacza, że w badaniu uczestniczyło 170 kobiet, które deklarowały pracę do 60 roku życia. Liczba 46 oznacza, że w badaniu uczestniczyło 46 mężczyzn, którzy nie mieli zdania.

⁵⁷ Wymagane jest, aby w każdej z komórek tablicy była wystarczająca liczba obserwacji. Konkretyzacja tego postulatów jest w różnych podręcznikach niejednakowo formułowana. Najniższą liczebność warunkową postuluje się na poziomie 5.

Zależność między płcią a rodzajem decyzji można ocenić za pomocą np. współczynnika **V Cramera**⁵⁸, który przyjmuje wartości z przedziału $\langle 0; 1 \rangle$. Wartość współczynnika równa 0 świadczy o niezależności cech, a im wynik bardziej oddala się od 0, tym związek między cechami jest silniejszy. W przykładzie otrzymujemy $V = 0,0534$. Uzyskany wynik świadczy o tym, że płeć nie ma praktycznie żadnego związku z decyzją o wieku przejścia na emeryturę.

Reasumując, w celu przeprowadzenia analizy statystycznej badanego zagadnienia konieczna jest znajomość przedmiotu. Poprawność analizy związku korelacyjnego zależy od znajomości problemu badawczego i uwarunkowań kształtujących badane zjawiska. Ponadto przed przystąpieniem do oceny zależności ważna jest ocena związku pod względem jego charakteru (liniowy czy krzywoliniowy), jednorodności zjawisk, zakresu zmienności wartości i występowania wartości skrajnych. Analizę liczbową zawsze powinna poprzedzać analiza wykresu korelacyjnego.

Po lekturze tego rozdziału Czytelnik powinien:

- znać pojęcie korelacji dodatniej i ujemnej,
- wiedzieć, w jakich sytuacjach badawczych stosować współczynnik korelacji liniowej Pearsona, w jakich współczynnik korelacji rang, a w jakich współczynniki kontyngencji,
- znać własności współczynników korelacji i umieć zinterpretować uzyskane wyniki.

Pytania sprawdzające

1. W przypadku korelacji dodatniej spadek wartości jednej cechy powoduje wzrost czy spadek wartości drugiej cechy?
2. Czy wartość współczynnika korelacji liniowej Pearsona $+0,7$ i $-0,7$ informują o różnym natężeniu i kierunku korelacji?
3. Czy w przypadku współczynnika korelacji V Cramera wynik $-0,7$ informuje o silnej korelacji ujemnej?
4. Który z czynników: poziom wykształcenia (tablica 4.3 – $V = 0,024$) czy poziom dochodu (tablica 4.4 – $V = 0,186$) jest w większym stopniu powiązany z liczbą posiadanych polis ubezpieczeniowych?

⁵⁸ Inne współczynniki podają m.in. [Makać, Urbanek-Krzysztofiak 2008; Nawojczyk 2004; Starzyńska 2008]. Na wartość współczynników mają wpływ rozmiary tablicy oraz liczba obserwacji. Każdy z nich daje nieco inne wyniki.

Tablica 4.3. Poziom wykształcenia a liczba posiadanych polis ubezpieczeniowych

Poziom wykształcenia	Liczba polis		Razem
	1	2 lub więcej	
Zawodowe	5	9	14
Średnie	22	36	58
Wyższe	16	29	45
Razem	43	74	117

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Wicka, Miedzik 2010, s. 270].

Tablica 4.4. Poziom dochodu a liczba posiadanych polis ubezpieczeniowych

Dochód	Liczba polis		Razem
	1	2 lub więcej	
do 1000 zł	11	11	22
1001–2200	23	37	60
2201–4000	8	20	28
4000 lub więcej	1	6	7
Razem	43	74	117

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Wicka, Miedzik 2010, s. 270].

Rozdział 5

Analiza zmian w czasie

Teresa Plenikowska-Ślusarz

Hasła: *szereg czasowy, trend, wahania okresowe, wahania sezonowe, wahania przypadkowe, miary dynamiki, miary łańcuchowe i jednopodstawowe, przyrosty absolutne, indywidualne wskaźniki dynamiki, tempo zmian, średnie tempo zmian*

5.1. Składniki szeregu czasowego

Szeregiem czasowym (dynamicznym, chronologicznym)⁵⁹ nazywamy ciąg wartości badanej cechy (zjawiska) obserwowany w kolejnych jednostkach czasu (dniach, tygodniach, miesiącach, kwartałach lub latach). Wybór długości jednostki czasu zależy od celu i szczegółowości badania, rodzaju zjawiska, mechanizmu zmian (rozwoju). Konkretną wartość badanej zmiennej zaobserwowaną w jednostce czasu oznaczamy symbolem y_t . Zatem szereg czasowy to ciąg wartości: $y_1, y_2, \dots, y_n$. Szereg czasowy jest liczbowym opisem historii jakiegoś zjawiska, zazwyczaj gospodarczego lub społecznego. Interesujące jest określenie występujących prawidłowości. Na podstawie obserwacji zjawiska w przeszłości możemy spróbować przewidzieć jego zmiany w przyszłości. Jest to możliwe, jeżeli zmiany podlegają jakimś prawidłowościom, a nam uda się je wykryć. Istnieją bowiem szeregi czasowe, które nie wykazują żadnej prawidłowości, nazywa się je błędzeniami przypadkowymi.

W szeregach czasowych wyodrębniamy następujące składowe: trend, wahania okresowe i wahania przypadkowe. Przy czym nie wszystkie one muszą występować jednocześnie.

Trend jest to ogólny kierunek rozwoju danego zjawiska, względnie trwały, obserwowany w długim okresie. Tendencja może być rosnąca, malejąca lub możemy obserwować stabilizację na pewnym poziomie. Przykładem wyraźnie

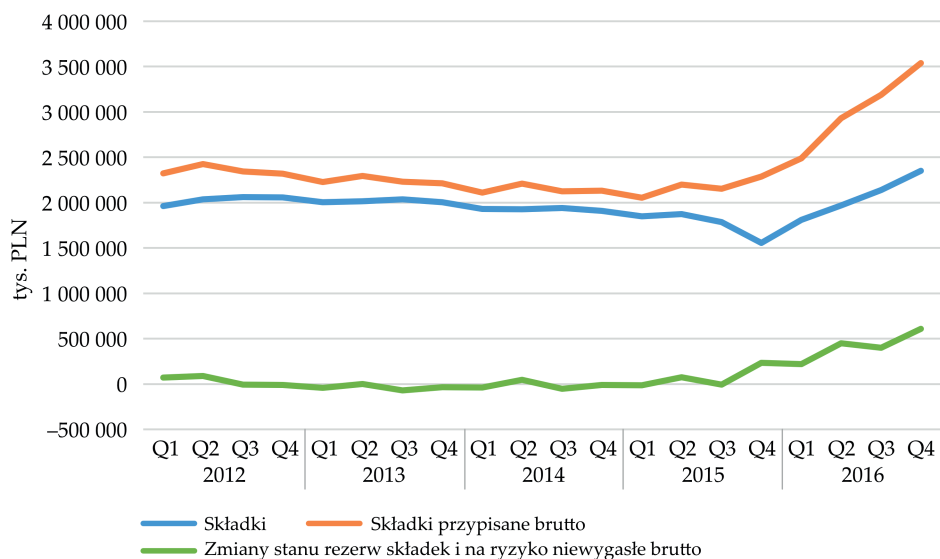
⁵⁹ Analiza szeregów czasowych została szeroko przedstawiona m.in. w: [Aczel 2017; Kot, Jakubowski, Sokołowski 2011; Makać, Urbanek-Krzysztofiak 2008; Nawojczyk 2004; Ostasiewicz 2011; Starzyńska 2008; Wieczorkowska, Kochański, Eljaszuk 2004].

określonej tendencji rozwojowej może być systematyczny wzrost liczby samochodów osobowych w gospodarstwach domowych kształtowany przez takie przyczyny główne, jak: wzrost liczby gospodarstw domowych posiadających samochody, wzrost liczby osób w gospodarstwie domowym posiadających samochód, zróżnicowanie cen samochodów itp.

Wahania okresowe to regularne odchylenia od trendu. Mogą się one charakteryzować różną długością cyklu. **Cykle długookresowe** to wahania, których okres jest dłuższy niż 1 rok, bez względu na częstość pomiaru zjawiska. W zagadnieniach ekonomicznych są to cykle koniunkturalne spowodowane zmianami stanu gospodarki danego kraju, czyli koniunktury gospodarczej. Wzrost lub spadek w stosunku do tendencji pojawia się cyklicznie co kilka lat. **Wahania sezonowe** są to odchylenia od trendu będące wynikiem zmian zachodzących w przyrodzie w związku z porami roku. Długość cyklu wynosi jeden rok. Najczęściej analizuje się je w oparciu o dane miesięczne lub kwartalne. Przykładem może być okresowy wzrost liczby ubezpieczeń związany z wyjazdami urlopowymi, wzrost liczby zgłaszanych szkód w okresie wakacyjnym. **Wahania krótkookresowe** mają okres krótszy od jednego roku, np. większa liczba szkód samochodowych zgłaszana na początku tygodnia. Oczywiście im krótsze wahania chcemy zaobserwować i analizować, tym większa musi być częstotliwość zbierania danych. Monitorowanie wahań o różnej długości cyklu ma znaczenie w przypadku analiz przyczynowych. Różne grupy przyczyn powodują powstanie wyróżnionych typów wahań okresowych. **Wahania przypadkowe** są to nieregularne zmiany poziomu zjawiska wywołane przyczynami przypadkowymi (losowymi), niezwiązanymi z istotą badanego zjawiska, np. zwiększenie liczby zgłaszanych szkód z powodu niekorzystnych warunków pogodowych (burze, ulewy, powódź, gołoledź), pożarów, kradzieży itp.

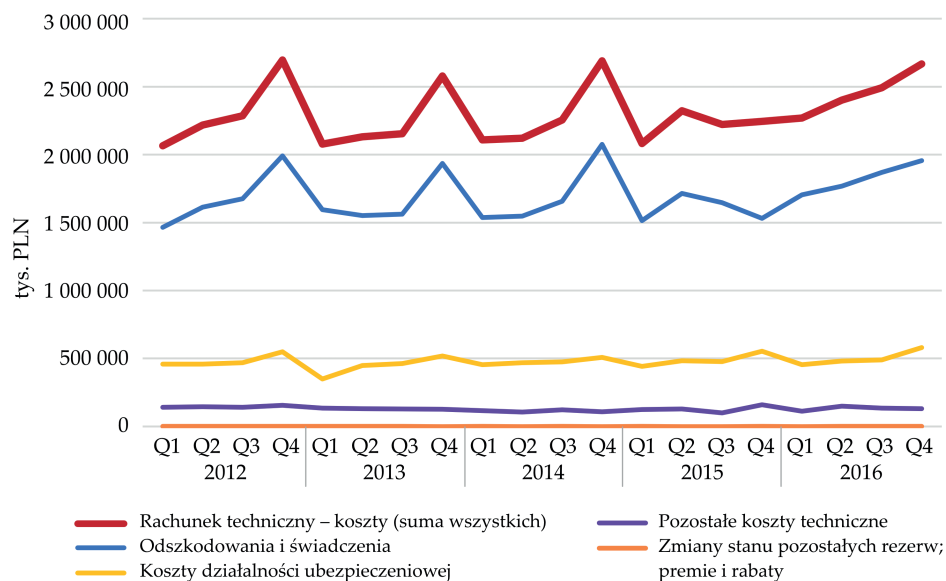
Każdą analizę szeregu czasowego należy rozpocząć od sporządzenia wykresu. Analiza graficzna szeregu czasowego umożliwia sformułowanie hipotez co do jego struktury i charakteru składowych. Na rysunkach 5.1, 5.2 i 5.3 przedstawiono przykłady zjawisk, których poziom rejestrowano kwartalnie lub miesięcznie i których zmiany charakteryzuje tendencja rozwojowa, wahania sezonowe i przypadkowe.

Przedstawione na rysunku 5.1 zmienne do pierwszego kwartału 2015 r. kształtowały się na stałym poziomie, widoczne są również wahania o charakterze przypadkowym. W okresie późniejszym uwidoczniła się tendencja rosnąca. W przypadku zmiany stanu rezerw składek i na ryzyko niewygaśle brutto uwidoczniły się ponadto wahania sezonowe.



Rysunek 5.1. Składki i rezerwy OC w kolejnych kwartałach lat 2012–2016

Źródło: [Raport z badania rynku ubezpieczeń komunikacyjnych... 2018, s. 62].

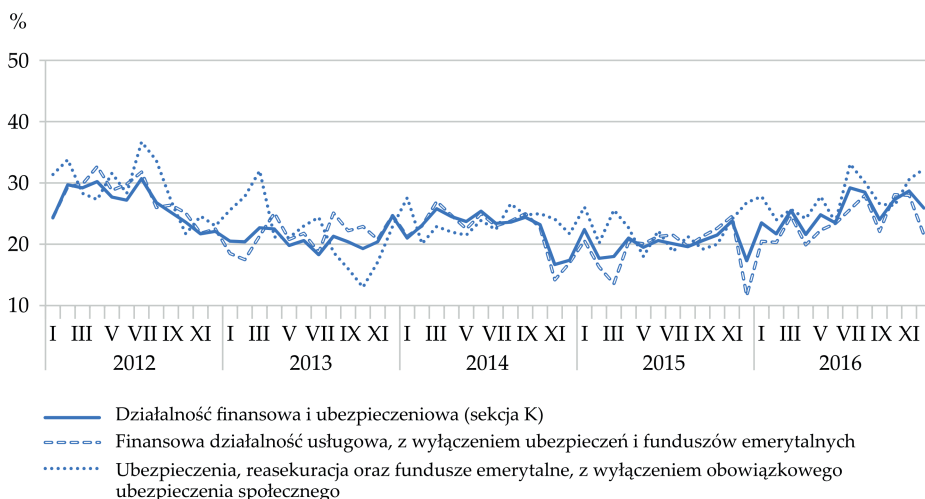


Rysunek 5.2. Koszty zakładów ubezpieczeń OC w kolejnych kwartałach lat 2012–2016

Źródło: [Raport z badania rynku ubezpieczeń komunikacyjnych... 2018, s. 63].

Spśród zmiennych, których zmiany przedstawiono na rysunku 5.2, dwie charakteryzują się powolną tendencją rosnącą i wyraźnymi wahaniami sezonowymi (rachunek techniczny i pozostałe koszty techniczne), pozostałe wydaje się, że kształtują się przeciętnie na stałym poziomie i podlegają wahaniom przypadkowym. Ocena elementów składowych przedstawionych na wykresie zmiennych jest utrudniona ze względu na to, że kształtują się one na bardzo różnym poziomie.

Na rysunku 5.3 przedstawiono kształtowanie się koniunktury w działalności finansowej i ubezpieczeniowej w kolejnych miesiącach lat 2012–2016.



Rysunek 5.3. Koniunktura w działalności finansowej i ubezpieczeniowej w kolejnych miesiącach lat 2012–2016

Źródło: [Polski rynek ubezpieczeniowy 2017, s. 28].

Wskaźniki ogólnego klimatu koniunktury charakteryzuje zmienna tendencja, wahania sezonowe i przypadkowe. Wskaźnik koniunktury działalności finansowej i ubezpieczeniowej w okresie od lutego 2012 r. do lipca 2013 r. charakteryzuje tendencja malejąca, zaś od listopada 2014 r. do grudnia 2016 r. tendencja rosnąca. Niemal w każdym roku w początkowych miesiącach występowały odchylenia w kierunku powyżej trendu. W finansowej działalności usługowej wskaźnik koniunktury ma wyraźną tendencję rosnącą w okresie luty 2012 r.–styczeń 2013 r. oraz w okresie listopad 2014 r.–listopad 2016 r. W ubezpieczeniach, reasekuracji oraz funduszach emerytalnych obserwowano wyraźny spadek wskaźnika w okresie sierpień 2012 r.–październik 2013 r.

oraz wyraźny wzrost w okresie listopad 2014 r. – listopad 2016 r. W przypadku wszystkich przedstawionych wskaźników obserwowane odchylenia od trendu mają najczęściej charakter przypadkowy.

Metody analizy elementów charakteryzujących szeregi czasowe dzielimy na dwie zasadnicze grupy:

- metody dekompozycji szeregów czasowych wielookresowych służące do wyodrębniania tendencji rozwojowej, wahań okresowych oraz wahań przypadkowych,
- miary dynamiki, które służą do liczbowego określania zmian w okresie badanym w porównaniu z okresem przyjętym za podstawę porównań.

5.2. Wyznaczanie tendencji rozwojowej

Do najważniejszych metod badania szeregu dynamicznego należy wyodrębnianie tendencji rozwojowej. Stosowane są dwie metody prowadzące do eliminacji różnego rodzaju wahań w celu uzyskania czystego trendu:

- 1) metoda mechaniczna – metoda średnich ruchomych,
- 2) metoda analityczna – polegająca na dopasowaniu postaci funkcji matematycznej, która swym kształtem najlepiej opisuje zmiany w poziomie badanego zjawiska i oszacowaniu jej parametrów.

Stosując **średnie ruchome**, doprowadzamy do wygładzenia szeregu danych empirycznych przez częściowe wyeliminowanie wahań przypadkowych i okresowych. Średnia ruchoma może być liczona zarówno z parzystej, jak i nieparzystej liczby okresów. Jeżeli przez $y_1, y_2, \dots, y_n$ oznaczymy poziomy zjawiska w kolejnych okresach, to średnią ruchomą, np. 3-okresową, zapiszemy następująco:

$$\bar{y}_2 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \quad \bar{y}_3 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}; \quad \bar{y}_4 = \frac{y_3 + y_4 + y_5}{3}; \text{ itd.} \quad (5.1)$$

Przyporządkowanie otrzymanego wyniku średniej przypada na środkowy okres uwzględniany w obliczeniach. Zatem w przypadku pierwszej średniej okresem środkowym jest okres drugi, dla drugiej średniej – okres trzeci itd.

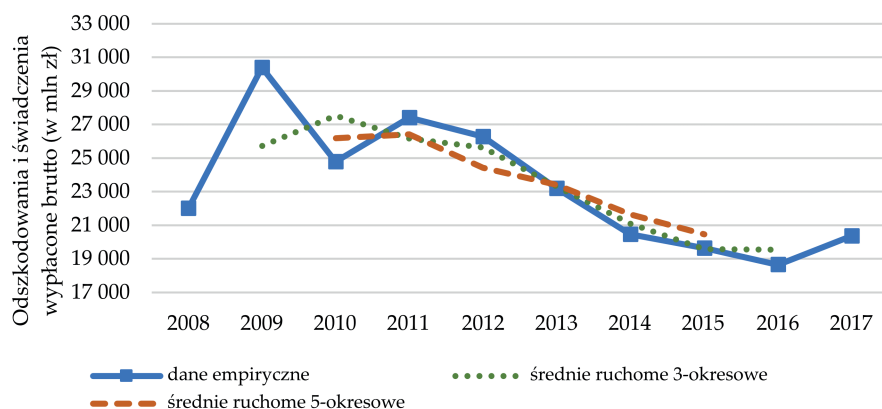
Przykład 5.1

Odszkodowania i świadczenia wypłacone brutto (w mln zł) w latach 2008–2017 oraz średnie ruchome 3- i 5-okresowe przedstawia tablica 5.1 oraz rysunek 5.4.

Tablica 5.1. Odszkodowania i świadczenia wypłacone brutto (w mln zł) w latach 2008–2017 – wartości empiryczne i średnie ruchome 3- i 5-okresowe

Lata	Dane empiryczne	Średnie ruchome 3-okresowe	Średnie ruchome 5-okresowe
2008	22 006	.	.
2009	30 391	25 725,0 ⁶⁰	.
2010	24 778	27 525,0	26 170,8 ⁶¹
2011	27 406	26 152,3	26 409,6
2012	26 273	25 626,3	24 422,6
2013	23 200	23 309,7	23 393,6
2014	20 456	21 096,3	21 642,6
2015	19 633	19 580,0	20 459,0
2016	18 651	19 546,3	.
2017	20 355	.	.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Raport roczny PIU 2017].



Rysunek 5.4. Odszkodowania i świadczenia wypłacone brutto (w mln zł) w latach 2008–2017 – wartości empiryczne i średnie ruchome 3- i 5-okresowe

Źródło: Opracowanie własne na podstawie tablicy 5.1.

⁶⁰ $25\,725,0 = (22\,006 + 30\,391 + 24\,778) / 3$

⁶¹ $26\,170,8 = (22\,006 + 30\,391 + 24\,778 + 27\,406 + 26\,273) / 5$

Średnie ruchome dobrze wygładziły szereg. Uwidoczniła się wyraźna tendencja spadkowa. Bardziej wygładzony jest szereg średnich ruchomych 5-okresowych niż 3-okresowych. Jest to właściwość tej metody. Im więcej okresów liczy średnia ruchoma, tym otrzymujemy lepsze wygładzenie, ale również tracimy więcej danych. Dla średnich 3-okresowych utraciliśmy dane dla dwóch okresów, jednego na początku i jednego na końcu, dla średnich 5-okresowych utraciliśmy dane dla czterech okresów, dwóch na początku i dwóch na końcu. Dlatego średnie ruchome długookresowe można stosować w szeregach czasowych o długim okresie obserwacji.

Średnie ruchome możemy wykorzystać do wyeliminowania z szeregu czasowego wahań sezonowych. Wówczas średnie ruchome powinny obejmować określoną liczbę jednostek czasu. Jeżeli informacje liczbowe podane są w kwartałach, to zastosujemy 4-okresową średnią ruchomą, jeśli w miesiącach, to 12-okresową. Pojawia się problem liczenia średnich ruchomych z parzystej liczby okresów. W takiej sytuacji stosujemy tzw. średnie ruchome scentrowane. Średnią ruchomą scentrowaną dla czterech jednostek czasu obliczymy np. w następujący sposób⁶²:

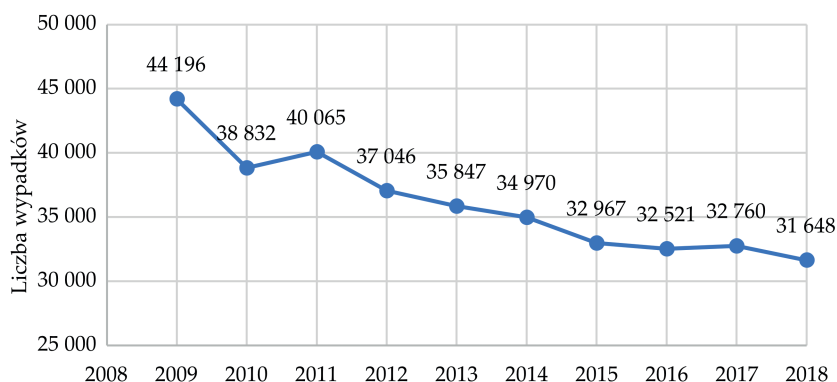
$$\bar{y}_3 = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{1}{2}y_5}{4}; \quad \bar{y}_4 = \frac{\frac{1}{2}y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + \frac{1}{2}y_6}{4}; \text{ itd.} \quad (5.2)$$

W pierwszym przypadku średnia scentrowana jest przyporządkowana, licząc kolejno, trzeciemu okresowi, a w drugim – czwartemu okresowi.

Przykład 5.2

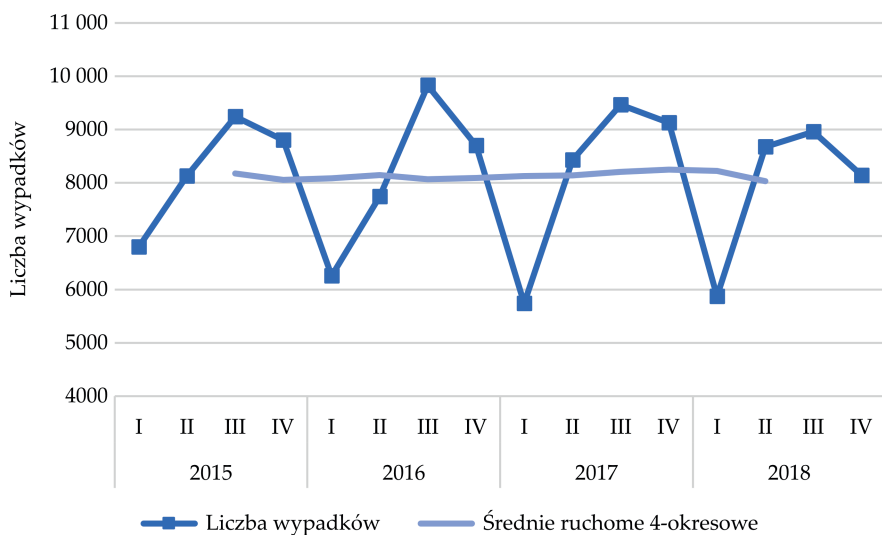
Zmiany w liczbie wypadków drogowych w latach 2009–2018 przedstawiono na rysunku 5.5. W analizowanym okresie liczba wypadków do 2015 r. wykazywała wyraźną tendencję malejącą. W dwóch kolejnych latach utrzymała się na poziomie zbliżonym do 2015 r., w 2018 r. wystąpił niewielki spadek. Przedstawione dane to dane roczne. W takim ujęciu nie jest możliwe zaobserwowanie zjawiska sezonowości, wzrostu liczby wypadków w okresie wakacyjnym i w listopadzie każdego roku. Wymaga to zebrania danych kwartalnych lub miesięcznych. Informacje o liczbie wypadków w poszczególnych kwartałach lat 2015–2018 przedstawiono na rysunku 5.6 oraz w tablicy 5.2.

⁶² Innym rozwiązaniem jest liczenie średniej dwuetapowo. Najpierw wyliczamy średnią arytmetyczną z czterech okresów, której wynik przypada między okresy, a następnie średnią arytmetyczną z każdych dwóch kolejnych średnich i uzyskujemy przypisanie do konkretnego okresu.



Rysunek 5.5. Liczba wypadków drogowych w Polsce w latach 2009–2018

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: [Wypadki drogowe w Polsce... 2019].



Rysunek 5.6. Liczba wypadków drogowych w Polsce w kwartałach lat 2015–2018 oraz średnie ruchome 4-okresowe

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: [Wypadki drogowe w Polsce... 2019].

Dane kwartalne pozwalają zauważyć wyraźną sezonowość w liczbie wypadków. Najwięcej wypadków miało miejsce w trzecich kwartałach, a stosunkowo najmniej w pierwszych. W celu wygładzenia szeregu z wahań sezonowych i otrzymania czystego trendu z wykorzystaniem średnich ruchomych należy

zastosować średnie 4-okresowe. Sposób obliczania średnich ruchomych 4-okresowych i wyniki przedstawiono na rysunku 5.6 i w tabelcy 5.2.

Tablica 5.2. Liczba wypadków drogowych latach 2015–2018 oraz średnie ruchome 4-okresowe

Lata	Kwartaly	Liczba wypadków	Średnie ruchome 4-okresowe
2015	I	6800	.
	II	8125	.
	III	9242	8173,500 ⁶³
	IV	8800	8057,125
2016	I	6254	8082,250
	II	7740	8142,875
	III	9828	8066,125
	IV	8699	8088,375
2017	I	5741	8129,375
	II	8431	8137,000
	III	9465	8206,375
	IV	9123	8253,375
2018	I	5872	8220,750
	II	8676	8034,750
	III	8959	.
	IV	8141	.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: [Wypadki drogowe w Polsce... 2019].

Obliczone średnie ruchome wygładziły szereg czasowy z wahań sezonowych, ukazała się tendencja – stały średni poziom liczby wypadków w latach 2015–2017 i zarysowująca się tendencja do spadku w roku ostatnim.

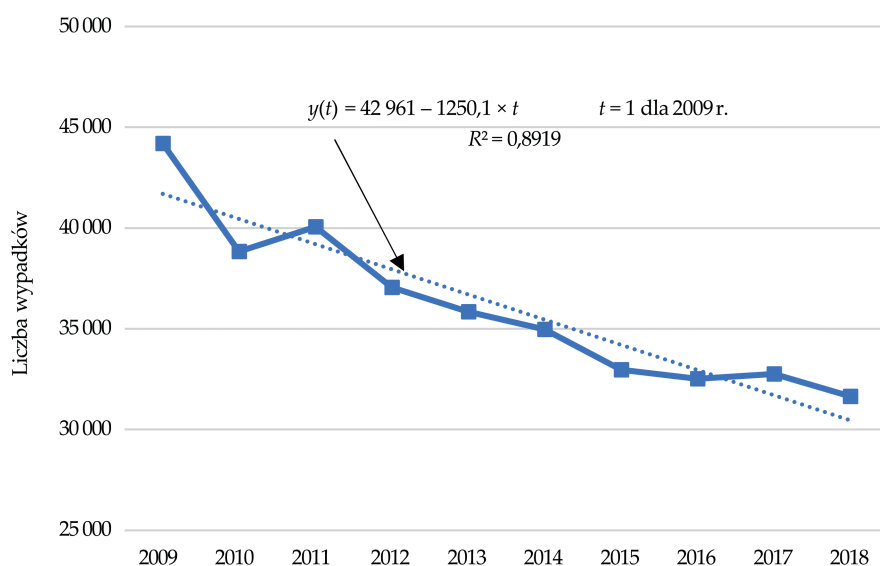
Jak widać na rysunkach 5.4 i 5.6, obliczone średnie ruchome wygładziły dosyć dobrze szeregi empiryczne. Prostota procedury obliczeniowej średnich ruchomych jest bezsprzeczną zaletą mechanicznej metody wyrównywania (wygładzania) szeregów czasowych w celu określenia tendencji rozwojowej badanego zjawiska. Średnie ruchome wygładzają szereg, nie eliminując całkowicie śladów najsilniejszych wahań. Metodę średnich ruchomych stosuje się zazwyczaj do analizy szeregów charakteryzujących się dużymi różnokierunkowymi zmianami poziomu zjawiska, które utrudniają dobór odpowiedniej funkcji analitycznej. Podstawową jej wadą jest skracanie szeregów czasowych

⁶³ Pierwsza wartość została obliczona następująco: $8173,5 = (0,5 \times 6800 + 8125 + 9242 + 8800 + 0,5 \times 6254) / 4$; kolejne średnie ruchome obliczono w analogiczny sposób.

o wartości na początku i na końcu okresu – utrata informacji dla tych okresów. Natomiast brak możliwości przedstawienia tendencji rozwojowej w formie matematycznej funkcji trendu nie pozwala na oszacowanie poziomu zjawiska w przyszłości. Postulat ten spełnia wspomniana metoda analityczna.

Przykład 5.3

Analizując zmiany w liczbie wypadków w stosunkowo krótkim okresie 16 kwartałów (4 lata), nie zaobserwowano wyraźnej tendencji malejącej czy rosnącej (rys. 5.6). Natomiast wydłużenie okresu obserwacji do 10 lat pozwala zauważyć wyraźną tendencję malejącą. Informacje o rocznej liczbie wypadków drogowych w latach 2009–2018 oraz wartości teoretyczne wyznaczone w oparciu o liniową funkcję trendu wyznaczoną metodą analityczną⁶⁴ przedstawiono na rysunku 5.7.



Rysunek 5.7. Liczba wypadków drogowych w Polsce w latach 2009–2018 oraz liniowa funkcja trendu

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: [Wypadki drogowe w Polsce... 2019].

⁶⁴ Stosowanie metody analitycznej (metody najmniejszych kwadratów) przedstawiono m.in. w: [Aczel 2017; Kot, Jakubowski, Sokołowski 2007; Makać, Urbanek-Krzysztofiak 2008; Nawojczyk 2004; Ostasiewicz 2011; Starzyńska 2008; Wieczorkowska, Kochański, Eljaszuk 2004].

Parametr stojący przy zmiennej czasowej t nazywany jest współczynnikiem trendu liniowego i informuje, jaki jest przeciętny wzrost lub spadek obserwowanej zmiennej y_t na jednostkę czasu t . W analizowanym przykładzie wartość $-1\,250,1$ oznacza, że w latach 2009–2018 liczba wypadków drogowych malała przeciętnie z roku na rok o około 1250. Drugi z parametrów, wyraz wolny, informuje o teoretycznym poziomie obserwowanej zmiennej y_t w czasie $t = 0$, czyli w 2008 r. teoretyczna liczba wypadków drogowych wynosiła 42 691. Zarówno na podstawie wykresu, jak i na podstawie wartości współczynnika determinacji⁶⁵ można ocenić, że liniowa funkcja trendu dobrze opisuje zmiany w liczbie wypadków drogowych w badanym okresie. W 89,19% zmiany w liczbie wypadków zostały wyjaśnione wpływem czasu, a 10,81% to wpływ wahań przypadkowych.

5.3. Miary dynamiki

Ważnym elementem oceny poziomu zjawisk, sytuacji przedsiębiorstw czy ich klientów na rynku jest odniesienie do innego okresu – przeprowadzenie analizy porównawczej w czasie. Porównywane zjawiska mogą kształtować się na różnym poziomie (np. przychody), mogą być wyrażone w różnych jednostkach (np. liczba klientów i wysokość składki). Analizę przeprowadzoną w oparciu o wartości absolutne uzupełniamy analizą opartą o miary względne. Miary absolutne informują, o ile jednostek, a miary względne, o ile procent zmienił się poziom badanego zjawiska w okresie badanym w stosunku do poziomu zjawiska w okresie przyjętym za podstawę porównań. Za podstawę porównań można każdorazowo przyjmować okres poprzedzający (zmienna podstawa) lub przyjąć jedną stałą podstawę dla całego badanego okresu. Okres przyjęty za podstawę porównań może być zmienny (okres poprzedni) bądź stały dla całego badanego okresu. Otrzymane miary nazywamy odpowiednio łańcuchowymi i jednopodstawowymi.

Przyrosty absolutne

Przyrosty absolutne są to mierniki będące różnicą wielkości zjawiska w dwóch różnych okresach. Jeżeli od poziomu zjawiska w okresie badanym y_t odejmiemy poziom w okresie poprzednim y_{t-1} , otrzymujemy **przyrosty absolutne**

⁶⁵ Współczynnik determinacji R^2 jest miarą informującą, w jakim stopniu zmiany badanego zjawiska zostały wyjaśnione wpływem czasu (por. rozdział 4).

łańcuchowe ($\Delta y = y_t - y_{t-1}$), jeżeli od poziomu zjawiska w okresie badanym y_t odejmiemy poziom w okresie bazowym (stałym dla danego badania) y_0 , otrzymujemy **przyrosty absolutne jednopodstawowe** ($\Delta y = y_t - y_0$).

Przykład 5.3

Wartość składki przypisanej brutto *per capita* (w zł⁶⁶) w Dziale I i II w latach 2012–2017 przedstawiono w tablicy 5.3 i na rysunku 5.8. Ponadto w tablicy 5.3 przedstawiono przyrosty absolutne łańcuchowe, a w tablicy 5.4 przyrosty absolutne jednopodstawowe.

Tablica 5.3. Wartość składki przypisanej brutto *per capita* (w zł) w Dziale I i II w latach 2012–2017 i wysokość zmian w porównaniu z rokiem poprzednim (w zł)

Lata	Składka przypisana brutto <i>per capita</i> (w zł)		Zmiana wysokości składki do roku poprzedniego (w zł)	
	Dział I	Dział II	Dział I	Dział II
2012	957	691	.	.
2013	816	694	-141 ⁶⁷	3
2014	748	686	-68	-8
2015	726	727	-22	41
2016	633	850	-93	123
2017	639	984	6	134

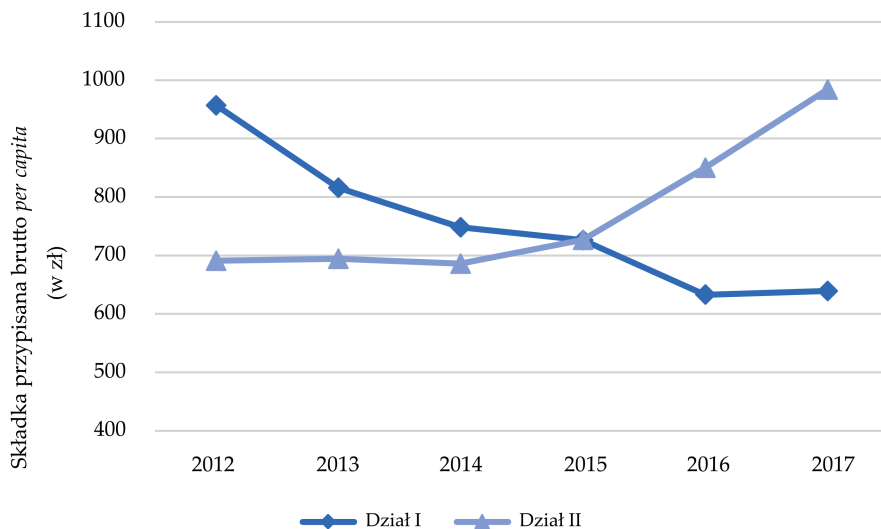
Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Raport roczny PIU 2017].

Poziom składki przypisanej brutto przypadający na jednego mieszkańca w obu Działach ubezpieczeń wykazywał w badanym okresie odmienne tendencje. Obserwowano spadek wysokości składki w przeliczeniu na 1 mieszkańca w Dziale I i wzrost w Dziale II. W Dziale I największy spadek wystąpił w 2013 r. i wynosił 141 zł na osobę, najmniejszy spadek wystąpił w roku 2015 i wynosił 22 zł na osobę (por. tab. 5.3). W 2017 r. odnotowano niewielki wzrost wynoszący 6 zł na osobę. W Dziale II obserwowano nie tylko tendencję rosnącą wartości składki (niemal wszystkie przyrosty są dodatnie), ale również zwiększanie przyrostu. Najmniejszy przyrost wystąpił w pierwszym roku badanego okresu, tj. w 2013 r., i wynosił 3 zł na osobę, największy wystąpił

⁶⁶ Wielkości w złotych podawane są w wartościach realnych z 2017 r. po przeliczeniu o wskaźniki inflacji publikowane przez GUS.

⁶⁷ Kolejne wyniki otrzymano: $-141 = 816 - 957$; $-68 = 748 - 816$; $-22 = 726 - 748$ itd.

w ostatnim roku, tj. w 2017 r., i wynosił 134 zł na osobę. W 2014 r. odnotowano niewielki spadek wynoszący 8 zł na osobę.



Rysunek 5.8. Wartość składki przypisanej brutto *per capita* w Dziale I i II w latach 2012–2017 (w zł)

Źródło: Opracowanie własne na podstawie tablicy 5.3.

Tablica 5.4. Wartość składki przypisanej brutto *per capita* (w zł) w Dziale I i II w latach 2012–2017 i wysokość zmian w porównaniu z rokiem 2012 (w zł)

Lata	Składka przypisana brutto <i>per capita</i> (w zł)		Zmiana wysokości składki w porównaniu z 2012 r. (w zł)	
	Dział I	Dział II	Dział I	Dział II
2012	957	691	0 ⁶⁸	0
2013	816	694	-141	3
2014	748	686	-209	-5
2015	726	727	-231	36
2016	633	850	-324	159
2017	639	984	-318	293

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Raport roczny PIU 2017].

⁶⁸ Kolejne wyniki otrzymano: 0 = 957 – 957, -141 = 816 – 957, -209 = 748 – 957 itd.

Wysokość składki przypisanej brutto w Dziale I w przeliczeniu na 1 mieszkańca była najwyższa w 2012 r., a najniższa w 2016 r. Składka w 2016 r. była o 324 zł niższa niż w 2012 r. Wysokość składki przypisanej brutto w Dziale II w przeliczeniu na 1 mieszkańca była najniższa w 2016 r., a najwyższa w 2017 r. – różnica wynosi 293 zł na osobę.

Indywidualne wskaźniki dynamiki

Indeksy dynamiki⁶⁹ są to mierniki będące stosunkiem wielkości zjawiska w dwóch różnych okresach, zazwyczaj pomnożone przez 100. Indeksy interpretujemy w procentach jako różnicę uzyskanego wyniku i 100. Otrzymany wynik, np. 123,5, informuje, że nastąpił wzrost badanego zjawiska o 23,5% ($123,5 - 100$); wynik 86,7 informuje, że nastąpił spadek zjawiska o 13,3% ($86,7 - 100 = -13,3$).

Jeżeli poziom zjawiska w okresie badanym y_n dzielimy przez poziom zjawiska w okresie poprzednim y_{n-1} , otrzymujemy **indeksy łańcuchowe** ($i = y_t / y_{t-1} \times 100$) (a różnicę wartości indeksu i 100 nazywamy **tempem zmian**), jeżeli poziom zjawiska w okresie badanym y_n dzielimy przez poziom w okresie bazowym (stałym dla danego badania) y_0 ($i = y_t / y_0 \times 100$), otrzymujemy **indeksy jednopodstawowe**.

Przykład 5.3 (cd.)

Wartość składki przypisanej brutto *per capita* (w zł) w Dziale I i II w latach 2012–2017 oraz dynamikę zmian w porównaniu z rokiem poprzednim przedstawiono w tablicy 5.5, a dynamikę zmian do roku 2012 w tablicy 5.6.

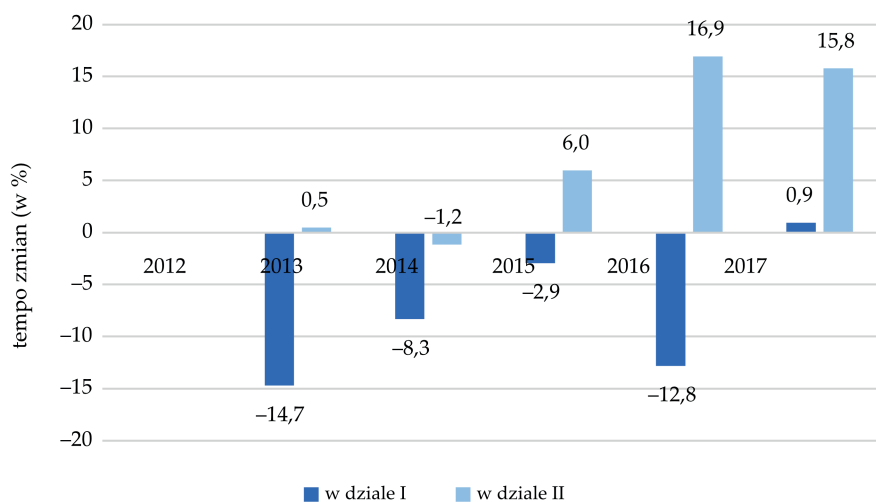
Wysokość składki przypisanej brutto na osobę w Dziale I była najwyższa w 2012 r., a najniższa w 2016 r. Tempo spadku do 2016 r. kształtowało się na różnym poziomie. Najwyższe było w 2013 r. i wynosiło 14,7%, najniższe w 2015 r. i wynosiło 2,9%. W 2017 r. wysokość składki wzrosła w porównaniu z 2016 r. o 0,9% (tempo wzrostu wynosiło 0,9%). Wysokość składki przypisanej brutto na osobę w Dziale II była najniższa w 2014 r. W kolejnych latach obserwowano jej systematyczny wzrost. Najwyższe tempo wzrostu było w 2016 r. i wynosiło 16,9%. Tempo wzrostu w 2017 r. było niższe niż tempo wzrostu w 2016 r. o 1,1 p.p. ($115,8 - 116,9 = -1,1$). Sposób prezentacji tempa zmian na wykresie przedstawiono na rysunku 5.9.

⁶⁹ O indeksach indywidualnych i innych miarach dynamiki oraz o warunkach stosowania, własnościach i sposobie liczenia m.in. w: [Aczel 2017; Makać, Urbanek-Krzysztofia 2008; Starzyńska 2008].

Tablica 5.5. Zmiana wysokości składki przypisanej brutto *per capita* (w zł) w Dziale I i II w latach 2012–2017, rok poprzedni = 100

Lata	Składka przypisana brutto <i>per capita</i> (w zł)		Rok poprzedni = 100	
	Dział I	Dział II	Dział I	Dział II
2012	957	691	.	.
2013	816	694	85,3 ⁷⁰	100,5
2014	748	686	91,7	98,8
2015	726	727	97,1	106,0
2016	633	850	87,2	116,9
2017	639	984	100,9	115,8

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Raport roczny PIU 2017].



Rysunek 5.9. Tempo zmian składki przypisanej brutto *per capita* (w zł) w Dziale I i II w latach 2012–2017 (w %)

Źródło: Opracowanie własne na podstawie tablicy 5.5.

Słupki powyżej osi poziomej informują o wzroście, zaś poniżej osi – o spadku poziomu badanego zjawiska.

⁷⁰ Wyniki otrzymano: $85,3 = 816 / 957 \times 100$; $91,7 = 748 / 816 \times 100$; $97,1 = 726 / 748 \times 100$ itd.

Tablica 5.6. Zmiana wysokości składki przypisanej brutto *per capita* (w zł) w Dziale I i II w latach 2012–2017, rok 2012 = 100

Lata	Składka przypisana brutto <i>per capita</i> (w zł)		rok 2012 = 100	
	Dział I	Dział II	Dział I	Dział II
2012	957	691	100,0 ⁷¹	100,0
2013	816	694	85,3	100,5
2014	748	686	78,2	99,3
2015	726	727	75,9	105,3
2016	633	850	66,2	123,1
2017	639	984	66,8	142,5

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Raport roczny PIU 2017].

W Dziale I wysokość składki na osobę była najniższa w 2016 r., w porównaniu z 2012 r. była niższa o 33,8%. Jej niewielki wzrost w 2017 r. spowodował, że w tym roku była ona niższa niż w 2012 r. o 33,2%. W Dziale II wysokość składki na osobę była najniższa w 2014 r., w porównaniu z 2012 r. była niższa o 0,7%. Wysokość składki była najwyższa w 2017 r. i w porównaniu z rokiem bazowym była wyższa o 42,5%.

W przedstawionym przykładzie za rok bazowy przyjęto pierwszy z objętych badaniem. W bardzo długich szeregach czasowych w miarę upływu czasu dobrze jest zmieniać okres bazowy na bliższy teraźniejszości.

Średnie tempo zmian

W celu przedstawienia średniookresowych względnych zmian zjawiska można posłużyć się **średnim tempem zmian**, które formalnie jest średnią geometryczną z łańcuchowych wskaźników dynamiki⁷², a wartość liczbową zależy jedynie od dwóch skrajnie położonych realizacji badanej zmiennej (wartości w okresie pierwszym y_1 i w ostatnim y_n). Wygodne jest obliczanie średniego tempa zmian ze wzoru:

$$\bar{T} = \left(\sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} - 1 \right) 100 \quad (5.3)$$

⁷¹ Kolejne wyniki otrzymano: 100,0 = 957 / 957 × 100; 85,3 = 816 / 957 × 100; 78,2 = 748 / 957 × 100; itd.

⁷² $\bar{T} = \left(\sqrt[n-1]{\prod_{t=2}^n \frac{y_t}{y_{t-1}}} - 1 \right) 100$.

Stosowanie średniego tempa zmian jest zasadne jedynie wtedy, kiedy zmiany z okresu na okres są w miarę regularne. Jeżeli zmiany charakteryzują się wyraźnymi wahaniami lub następuje zmiana tendencji, należy zrezygnować ze stosowania tej miary lub wyliczać dla podokresów charakteryzujących się tym samym kierunkiem i zbliżonym tempem zmian.

Przykład 5.3 (cd.)

W tablicy 5.5 przedstawiono informacje o wysokości składki przypisanej brutto *per capita* oraz indeksy łańcuchowe w Dziale I i II. W Dziale I do 2016 r. obserwowano spadek wysokości, zaś w 2017 r. wzrost. Zasadne jest zatem obliczanie średniego tempa spadku jedynie dla lat 2012–2016:

$$\bar{T} = \left(\sqrt[4]{\frac{633}{957}} - 1 \right) 100 = -9,8\%^{73}$$

Wynik informuje, że w latach 2012–2016 wysokość składki przypisanej brutto w Dziale I malała średnio z roku na rok o 9,8%. W Dziale II w 2013 r. obserwowano wzrost składki, w 2014 r. spadek, zaś w następnych latach systematyczny wzrost. Przy czym tempo wzrostu w 2015 r. wynoszące 6,0% było znacznie niższe niż w latach kolejnych, w których wynosiło odpowiednio 16,9% i 15,8%. Zatem ze średniego tempa do oceny zmian w Dziale II należy zrezygnować.

Należy pamiętać, że liczby absolutne i względne uzupełniają się, a nie zastępują. Nie zawsze analiza zmian za pomocą miar względnych jest zasadna. Dotyczy to sytuacji, w których poziom zjawiska kształtuje się na stosunkowo niskim poziomie, np. liczby zakładów ubezpieczeń w Polsce. W 2013 r. było 58 zakładów, w 2014 r. 56, zaś w 2015 r. 57. Lepiej jest wskazać, że liczba zakładów zmniejszyła się o dwa, a następnie wzrosła o jeden, niż wskazywać, że spadek wynosił 3,4%, a następnie nastąpił wzrost o 1,8%.

Po lekturze tego rozdziału Czytelnik powinien:

- umieć rozpoznawać składowe szeregi czasowych,
- umieć wyznaczać trend, stosując metodę mechaniczną,
- umieć obliczać i interpretować przyrosty absolutne oraz indywidualne indeksy dynamiki łańcuchowe i jednopodstawowe.

⁷³ Wartość średniego tempa obliczona jako średnia geometryczna z indeksów łańcuchowych: $\bar{T} = \left(\sqrt[4]{0,853 \cdot 0,917 \cdot 0,971 \cdot 872} - 1 \right) 100 = -9,8\%$.

Pytania sprawdzające

1. W tablicy 5.7 przedstawiono informacje dotyczące składki przypisanej brutto w latach 2012–2017 według działów ubezpieczeń. Ile wynoszą wartości indeksów łańcuchowych i jednopodstawowych (przyjmując poziom z 2012 r. za podstawę porównań)? Wyjaśnić różnice w uzyskanych wynikach w stosunku do wartości wskaźników przedstawionych w tablicach 5.5 i 5.6.

Tablica 5.7. Wartość składki przypisanej brutto (w mln zł) w Dziale I i II w latach 2012–2017

Lata	Składka przypisana brutto (w mln zł)	
	Dział I	Dział II
2012	26 273	14 240
2013	23 200	13 780
2014	20 456	13 877
2015	19 633	15 896
2016	18 651	18 758
2017	20 355	19 485

Źródło: [Raport roczny PIU 2017].

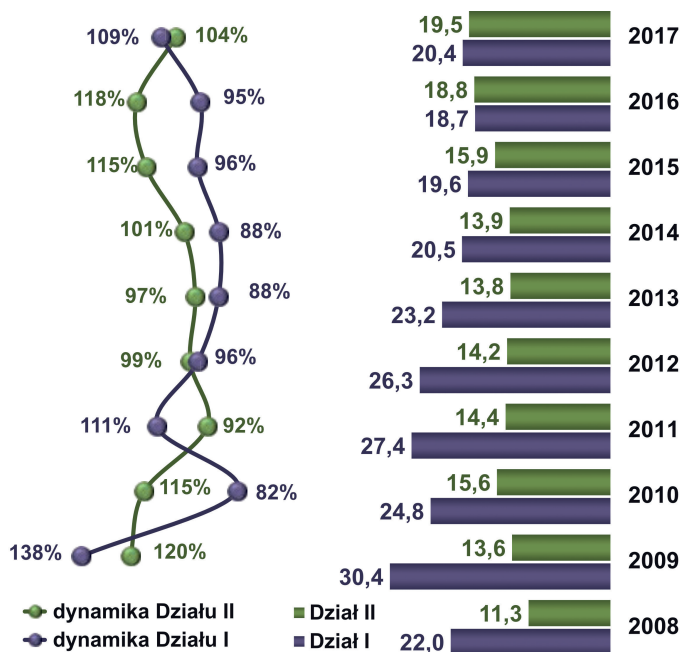
2. W poniższej tablicy przedstawiono informacje dotyczące dynamiki odszkodowań i świadczeń wypłaconych brutto (rok poprzedni = 100).

Tablica 5.8. Dynamika odszkodowań i świadczeń wypłaconych brutto przez zakłady ubezpieczeń w Polsce w latach 2009–2017, rok poprzedni = 100

Lata	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Dział I	115	92	99	97	101	115	118	104
Dział II	82	111	96	88	88	96	95	109

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Raport roczny PIU 2017].

W opracowaniu PIU dane te zostały przedstawione również w postaci poniższego wykresu:



Rysunek 5.10. Wysokość odszkodowań i świadczeń wypłaconych brutto przez zakłady ubezpieczeń w Polsce oraz dynamika zmian (rok poprzedni = 100) w latach 2009–2017

Źródło: [Raport roczny PIU 2017, s. 59].

Na podstawie przedstawionych danych określ dla obu Działów:

- W którym roku wystąpił spadek, a w którym wzrost wysokości wypłaconych odszkodowań i świadczeń?
- W którym roku wysokość wypłaconych odszkodowań i świadczeń była najwyższa, a w którym najniższa?
- W którym roku tempo wzrostu było najwyższe, a w którym najniższe?
- W którym roku tempo spadku było najwyższe, a w którym najniższe?
- Czy w twojej ocenie lewa część wykresu 5.10 ułatwia ocenę zmian?

Rozdział 6

Modelowanie zjawisk ubezpieczeniowych za pomocą rozkładów prawdopodobieństwa

Mirosław Szreder, Anna Gierusz

Hasła: zdarzenie losowe, prawdopodobieństwo, miara probabilistyczna, zmienna losowa skokowa, zmienna losowa ciągła, rozkład prawdopodobieństwa, dystrybuanta, wartość oczekiwana

6.1. Istota prawdopodobieństwa

Każdemu z nas, także przedsiębiorstwom i wszelkiego rodzaju organizacjom, trudno jest się ustrzec przed działaniami i negatywnymi skutkami różnych zjawisk losowych. Rozbite szyby w wyniku gradobicia, utracony bagaż w podróży lotniczej, nagła choroba uniemożliwiająca wyjazd na urlop, kradzież mienia to tylko niektóre przykłady losowych zdarzeń, których wolelibyśmy uniknąć. Często okazuje się to jednak niemożliwe. Z jednej strony podejmujemy wiele działań prewencyjnych, aby zdarzenia te nas nie spotkały. Z drugiej jednak strony przygotowujemy się na wypadek, gdyby dotknęły nas konsekwencje takich zdarzeń i w ubezpieczeniach dostrzegamy szansę na rekompensatę poniesionych strat. Ubezpieczamy się od nieprzewidzianych skutków działania zdarzeń losowych. Oczekujemy, że w zamian za opłaconą polisę ubezpieczeniową zakład ubezpieczeń wypłaci nam odszkodowanie w przypadku zaistnienia tzw. wypadku ubezpieczeniowego.

W problematyce ubezpieczeniowej poruszamy się – jak widać – w zbiorach zdarzeń losowych. Dla każdego ubezpieczyciela kluczową sprawą jest poznanie specyfiki tych zdarzeń. Chodzi o to – mówiąc językiem współczesnej młodzieży – aby zdarzenia, co do których nigdy nie mamy pewności, kiedy i z jaką intensywnością wystąpią, jakoś ogarnąć. Ważne jest przede wszystkim to, by potrafić zmierzyć i liczbowo wyrazić szanse ich wystąpienia. Matematyczną miarą szans realizacji danego zdarzenia losowego jest prawdopodobieństwo. Jest to funkcja, która zdarzeniu losowemu przyporządkowuje liczbę

z przedziału $[0,1]$, nazywaną prawdopodobieństwem zajścia tego zdarzenia. Ale zanim szerzej omówimy właściwości i interpretację tej funkcji, sprawdźmy, czy na pewno dobrze rozumiemy losowość zdarzeń.

Dotychczasowe doświadczenie życiowe każdego z nas jasno sugeruje, że losowość jest na trwałe wpisana w naturę otaczającego nas świata. Kiedyś jej głównym źródłem była przyroda, a obecnie losowość dostrzegamy także – i bronimy się przed jej skutkami – w konstruowanych urządzeniach technicznych, w zjawiskach społecznych (zamachy terrorystyczne), w działaniach rynków finansowych. Poznanie losowości choćby niektórych zdarzeń rozpoczyna się zwykle od pomiaru niepewności i próby jej modelowania. Służy temu gromadzenie i przetwarzanie wielu danych statystycznych i informacji, by później je wykorzystać do oszacowania prawdopodobieństwa tego, co ma charakter losowy.

Oceniając, co jest lub co nie jest losowe, część z nas ulega pewnym charakterystycznym złudzeniom. Bywa nawet, iż złudzenie to jest na tyle silne, na przykład wśród konsumentów, że musi na nie zareagować rynek. Przedsiębiorcy lub handlowcy decydują się na nadzwyczajne nieraz działania, zdając sobie sprawę z tego, że reagują na złudzenie konsumentów, a nie na obiektywną słabość produktu czy usługi. Ilustracją tej sytuacji może być przykład z książki Leonarda Mlodinowa, w której autor pisze o nieoczekiwanej decyzji firmy Apple w odniesieniu do mechanizmu losowego wyboru piosenek w jednym z modeli iPod'a. Prawdziwa losowość w wyborze piosenek może – jak wiadomo – prowadzić do powtórzeń tego samego utworu, ale część użytkowników, słuchając parokrotnie tej samej piosenki, nabrała przekonania, że dobór wcale nie był losowy. Ich presja na producenta była na tyle silna, że Steve Jobs, założyciel Apple, stwierdził ostatecznie, iż trzeba było zmienić mechanizm na mniej losowy po to, żeby wydawało się, że jest bardziej losowy [Mlodinow 2011, s. 203].

Podobnemu złudzeniu ulegamy także w dłuższych sekwencjach niezależnych zdarzeń losowych, uznając, na przykład, za mniej prawdopodobne wylosowanie w Lotto sześciu następujących po sobie kolejnych liczb aniżeli szóstki liczb reprezentujących kilka różnych dziesiątek. Z jednej strony skłonni jesteśmy dostrzegać istnienie zależności w sekwencji zdarzeń od siebie niezależnych, z drugiej zaś – gotowi jesteśmy przyjąć, że pewne zdarzenia są niezależne, mimo iż łączyć je może wspólna przyczyna⁷⁴.

⁷⁴ Klasycznym przykładem pierwszej z tych sytuacji jest wiara hazardzisty w kasynie (nie tylko w Monte Carlo), że po kilkakrotnym wskazaniu jednego z kolorów szanse na ukazanie się innego w kolejnej rundzie rosną. Osoby te widzą zależność tam, gdzie jej faktycznie nie ma. Wspomina ich w swojej książce znany węgierski pisarz Sándor

Sama skomplikowana natura losowości, a także zmieniające się otoczenie i okoliczności, w których zjawiska losowe się realizują, sprawiają, że nie jest łatwo podać uniwersalną, niezawodną w każdych warunkach miarę prawdopodobieństwa. Dlatego definicja prawdopodobieństwa, określona trzema aksjomatami Kołmogorowa, zawiera niezbędne warunki, jakie miara probabilistyczna powinna spełniać, ale nie wskazuje, w jaki sposób określonym zdarzeniom przyporządkować wartość funkcji $\mathbf{P}$, nazywanej prawdopodobieństwem (lub miarą probabilistyczną).

Definicja 6.1

Niech dany będzie zbiór zdarzeń elementarnych Ω i wyróżniona w nim rodzina M podzbiorów tego zbioru. Miarą probabilistyczną nazywamy funkcję $\mathbf{P}$ określoną na rodzinie zbiorów M

$$P: M \rightarrow R$$

spełniającą następujące warunki:

1. Każdemu zdarzeniu A należącemu do sigma ciała M przyporządkowana jest w sposób jednoznaczny nieujemna liczba $P(A)$ zwana prawdopodobieństwem zdarzenia A :

$$P(A) \geq 0$$

2. Dla zdarzeń parami rozłącznych zachodzi postulat przeliczalnej addytywności:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

3. Postulat unormowania:

$$P(\Omega) = 1$$

Wartość $P(A) = p$ miary probabilistycznej $\mathbf{P}$ dla określonego zdarzenia A nazywamy prawdopodobieństwem tego zdarzenia.

Márai, odwiedzający wiele lat temu Monte Carlo: „Oprócz cudownych hoteli i tropikalnej wegetacji Monte Carlo było i pozostaje miejscem bezwzględnego oszustwa i pierwszorzędną pułapką na frajerów. Wielu ludzi musiało tu pozostawić nie tylko pieniądze, ale również egzystencję, a czasem nawet życie. To się zdarza, na cmentarzu przy kasynie są trzy tysiące grobów. (...) Oszustwo odbywa się tu dostojnie i poważnie. Chciałoby się powiedzieć: śmiertelnie poważnie” [Márai 2011, s. 41].

W zastosowaniach rachunku prawdopodobieństwa korzysta się najczęściej z jednej z trzech interpretacji prawdopodobieństwa, przy czym każda z nich respektuje aksjomaty ujęte w definicji 6.1. Są to interpretacje: klasyczna (Laplace'a), częstościowa (statystyczna) oraz personalistyczna (subiektywna).

Klasyczna interpretacja prawdopodobieństwa (Laplace'a)

Jeżeli rozważany zbiór składa się ze skończonej liczby N zdarzeń elementarnych wzajemnie się wyłączających i jednakowo możliwych, i jeżeli wśród nich jest m zdarzeń sprzyjających zajściu zdarzenia A , to liczba

$$P(A) = \frac{m}{N} \quad (6.1)$$

wyraża prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A .

Interpretacja ta, historycznie najstarsza⁷⁵, odnosi się jedynie do takich zdarzeń, które da się ująć jako podzbiory jednakowo możliwych, wyłączających się zdarzeń elementarnych w zbiorze Ω . Na przykład, gdy A oznacza zdarzenie polegające na uzyskaniu liczby parzystej w rzucie kostką do gry, to jest to zdarzenie, które można rozpatrywać jako zbiór składający się z następujących zdarzeń elementarnych: uzyskanie dwóch oczek, uzyskanie czterech oczek lub uzyskanie sześciu oczek. Do obliczenia prawdopodobieństwa uzyskania parzystej liczby oczek w jednokrotnym rzucie kostką nie jest konieczne wykonywanie żadnych doświadczeń, rzutów czy eksperymentów. Znajomość konstrukcji kostki jest wystarczająca do obliczenia, że prawdopodobieństwo to wynosi $\frac{1}{2}$. Podobnie rzecz się ma z losowaniem kul różnych kolorów z urny, gdy znany jest jej skład, określonych kart z talii kart do gry itp. W rzeczywistości interpretacja ta ma zastosowanie tylko w tego typu „modelowych” sytuacjach, w których łatwo jest zastosować wzory kombinatoryczne. Praktyka życia codziennego jest jednak bardziej zróżnicowana i bardziej wymagająca. Rzadko w zagadnieniach ubezpieczeniowych, a więc w różnych zagadnieniach życia ludzkiego lub gospodarczego, mamy do czynienia ze zdarzeniami, które można zdekomponować na wyłączające się i jednakowo możliwe zdarzenia elementarne. Nie sposób interpretację tę zastosować do obliczania prawdopodobieństw takich zdarzeń, jak: niewypłacalność klienta po roku od udzielenia mu kredytu, uzyskanie określonej przedziałowo kwoty przychodu przez przedsiębiorstwo po zakończeniu zadania inwestycyjnego, wzrost kursu

⁷⁵ Wywodzi się ona z prac Blaise'a Pascala (1623–1662), Jakoba Bernoulliego (1654–1705) i Pierre'a Laplace'a (1749–1827).

złotego względem euro do poziomu powyżej pewnego poziomu, udział w referendum co najmniej połowy uprawnionych do głosowania itp. Jest to zaledwie kilka przykładów spośród wielu zagadnień, w których nie da się zastosować interpretacji klasycznej prawdopodobieństwa. Z tego powodu w zagadnieniach ubezpieczeniowych, a szerzej rzecz ujmując – w większości zastosowań statystyki – prawdopodobieństwo interpretuje się w kategoriach obserwowanej częstości względnej zdarzeń (interpretacja częstościowa).

Interpretacja częstościowa (statystyczna) prawdopodobieństwa

Interpretacja ta dotyczy powtarzalnego procesu, w którym istnieje możliwość obliczenia ilości powtórzeń oraz tych przypadków, w których wystąpiło interesujące nas zdarzenie. Prawdopodobieństwo rozumiane jest tu jako wartość graniczna częstości względnej pojawiania się interesującego nas zdarzenia, gdy liczba zdarzeń wzrasta do nieskończoności:

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_1}{N} \quad (6.2)$$

gdzie: n_1 – liczba przypadków, kiedy pojawiło się zdarzenie A, N – liczba powtórzeń (doświadczeń, zdarzeń, obserwacji).

W praktyce posługiwania się tą interpretacją symbol granicy (pojęcia abstrakcyjnego) zostaje zastąpiony symbolem równości w przybliżeniu, przy jednoczesnym postulowaniu dużej wartości liczby obserwacji N :

$$P(A) \approx \frac{n_1}{N} \quad (6.3)$$

Powtarzalność zdarzeń jest w przypadku tej interpretacji pojęciem kluczowym. Tylko bowiem w długiej serii powtarzalnych zdarzeń można w sposób wiarygodny oszacować względną częstość⁷⁶ (prawdopodobieństwo) wybranych, interesujących nas przypadków (zdarzeń). Korzystając z tej interpretacji, szacuje się na przykład prawdopodobieństwa wypadków ubezpieczeniowych.

Znaczenie częstościowej (statystycznej) interpretacji prawdopodobieństwa jest obecnie większe niż kiedykolwiek wcześniej. Spowodowane jest to możliwością uzyskiwania wielu rzeczywistych lub symulowanych komputerowo dużych ciągów zdarzeń losowych. Sięgnijmy najpierw do rzeczywistych,

⁷⁶ Pojęcie częstości względnej (inaczej wskaźnika struktury) zostało przedstawione w rozdziale 2.3.

obserwowalnych ciągów zdarzeń, które pozwalają na posługiwanie się interpretacją częstościową. Konstrukcja tablic wymieralności i obliczenia prawdopodobieństw dożycia określonego wieku przez osobę o ustalonych charakterystykach odbywają się na podstawie dużej liczby danych demograficznych z przeszłości. Podobnie przy ocenie prawdopodobieństwa, że kolejny klient nabywający polisę ubezpieczenia komunikacyjnego spowoduje k wypadków w ciągu najbliższego roku, bierze się pod uwagę długie ciągi danych o ubezpieczonych w przeszłości. Tablice bonus-malus, będące podstawą określenia wielkości składki w ubezpieczeniach samochodowych, są również tworzone w oparciu o dane o częstości względnej określonych zdarzeń w minionych okresach. Interpretację tę wykorzystuje się także do wyrażenia pewnych prawidłowości statystycznych, np. do oszacowania frakcji klientów tankujących paliwo w stacji benzynowej, którzy dodatkowo robią zakupy w należącym do niej sklepie. Oszacowanie tej frakcji staje się oceną prawdopodobieństwa, że kolejny (losowo wybrany) klient stacji dokona dodatkowo zakupów innych towarów. We wszystkich tych sytuacjach nie byłoby możliwe zastosowanie interpretacji klasycznej, nieodwołującej się do ciągów powtarzalnych zdarzeń.

Zwiększające się możliwości obliczeniowe komputerów sprawiają, że rośnie popularność symulacji stochastycznej jako jednej z technik szacowania prawdopodobieństw w wielu różnych dziedzinach. Zaobserwowane w wielu tysiącach eksperymentów prawidłowości są często przedstawiane w kategoriach prawdopodobieństwa ocenianego na podstawie częstości względnej wyróżnionych zdarzeń w całym ciągu wykonanych eksperymentów. Jest to typowe wykorzystanie interpretacji częstościowej prawdopodobieństwa.

Interpretacja ta, mimo rosnącego jej znaczenia, nie jest pozbawiona ograniczeń i wad. Jej krytycy zwracają przede wszystkim uwagę na to, że powtórzenie nawet jeden raz doświadczenia w identycznych warunkach jest zwykle niemożliwe. Traktowanie ciągu rzeczywistych zdarzeń ekonomicznych jako zaistniałych w tych samych warunkach może więc być założeniem zbyt odbiegającym od rzeczywistości. Zwykle bowiem zrealizowanie się któregoś z czynników ryzyka skutkującego wystąpieniem szkody prowadzi do podjęcia działań mających na celu zapobieżenie wystąpieniu szkody w przyszłości. Każda taka zmiana powoduje, że w jakimś stopniu nieaktualne stają się wszystkie wcześniej dokonane obserwacje, a także obliczone na ich podstawie częstości względne.

W stosunku do klasycznej interpretacji interpretacja częstościowa prawdopodobieństwa jest znacznie bardziej użyteczna, dzięki odwoływaniu się do powtarzalnych zdarzeń zamiast do nieprzystających zwykle do rzeczywistości

modeli tych zjawisk. Jej istotnym ograniczeniem jest zaś to, że nie może być stosowana w odniesieniu do zjawisk rzadkich lub niepowtarzalnych (np. wystąpienie poważnej awarii w elektrowni, ogłoszenie niewypłacalności przez przedsiębiorstwo, utrata pracy przez daną osobę), a także do zjawisk, które co prawda powtarzają się, ale w zmieniających się warunkach.

Potrzebę pomiaru niepewności w odniesieniu do zdarzeń, które w przeszłości występowały rzadko albo nie występowały wcale, rozumiano już setki lat temu. Angielski logik i filozof John Stuart Mill (1806–1873) pisał: „Musimy pamiętać, że prawdopodobieństwo jakiegoś zdarzenia nie jest właściwością samego tego zdarzenia, lecz jedynie nazwą stopnia, w jakim mamy podstawę, by tego zdarzenia oczekiwać. Prawdopodobieństwo jakiegoś zdarzenia dla jednej osoby jest rzeczą różną od prawdopodobieństwa tego samego zdarzenia dla innej, albo dla tej samej osoby, gdy zdobędzie ona dodatkowe dane” [Mill 1962, s. 86].

W tym krótkim cytacie kryje się cała istota tak zwanej personalistycznej lub subiektywnej interpretacji prawdopodobieństwa, której głównymi twórcami byli Thomas Bayes, Leonard J. Savage i Bruno de Finetti. Prawdopodobieństwo subiektywne staje się szansą wszędzie tam, gdzie trudno jest stopień niepewności wyrazić za pomocą prawdopodobieństwa interpretowanego klasycznie lub częstościowo. Przełomowe jest w tej interpretacji dopuszczenie subiektywnej wiedzy badacza (eksperta), jego doświadczenia bądź intuicji, jako pełnoprawnych źródeł informacji służących do oszacowania prawdopodobieństw zdarzeń.

Personalistyczna interpretacja prawdopodobieństwa

Przez personalistyczne lub subiektywne prawdopodobieństwo tego, że jakiś sąd na temat zdarzenia A jest prawdziwy rozumie się stopień pewności (ang. *degree of belief*) lub przekonania danej osoby o prawdziwości tego sądu. Zgodnie z tą interpretacją prawdopodobieństwo na temat zdarzenia A jest przypisane do danej osoby i może być różne dla różnych osób.

W przeciwieństwie do interpretacji częstościowej prawdopodobieństwo subiektywne jest traktowane personalistycznie i warunkowo ze względu na przeszłość i na całe otoczenie analizowanego zdarzenia. Jedynym ograniczeniem jest warunek, aby zbiór prawdopodobieństw był dla danej osoby spójny i nie łamał postulatu logicznej zgodności: „Zgodne lub spójne oszacowania są dotąd dopuszczalne, dopóki dana osoba czuje, że odpowiadają one jej przekonaniom” [Winkler 1967, s. 1105]. Tak więc danemu zdarzeniu nie musi

koniecznie odpowiadać jedna wartość prawdopodobieństwa. Może ona być różna nie tylko dla różnych osób, ale także dla tej samej osoby w różnych momentach czasu, wyrażając zmieniający się stan wiedzy tej osoby na temat danego zdarzenia i jego uwarunkowań.

W praktyce interpretację personalistyczną stosuje się w tych sytuacjach, kiedy do oceny prawdopodobieństw wystąpienia określonych zdarzeń można wykorzystać wiedzę ekspertów. Zwykle eksperckie oceny agreguje się według określonych formuł, aby zobiektywizować ostateczny sąd na temat szans realizacji danego zdarzenia lub zdarzeń.

W zagadnieniach ubezpieczeniowych – jak wcześniej wspomniano – podstawowe znaczenie ma częstościowa interpretacja prawdopodobieństwa oparta na danych statystycznych z przeszłości. Rolę pomocniczą może w pewnych sytuacjach pełnić interpretacja personalistyczna.

6.2. Liczba szkód i wartość odszkodowań jako zmienne losowe

Znając definicje prawdopodobieństwa, możemy teraz rozważyć, w jaki sposób można je wykorzystać do przewidywania wystąpienia wybranych zjawisk ubezpieczeniowych. Ubezpieczenia krótkoterminowe, np. ubezpieczenie OC pojazdu, charakteryzują się określonym, często jednorocznym okresem ubezpieczenia oraz wypłatą potencjalnie wielokrotnej liczby odszkodowań wynikających z roszczeń zgłoszonych w okresie ochrony ubezpieczeniowej. Liczba tych roszczeń może być dość zróżnicowana. Zakład ubezpieczeń będzie więc zainteresowany informacją o skali roszczeń, których może spodziewać się z nowo wykupionej polisy. W przypadku ubezpieczenia OC pojazdu może to być liczba od 0 do nieraz 3 lub 4 roszczeń, a teoretycznie może ich być dużo więcej (tab. 6.1).

Analizując zestawione dane, zauważymy, iż w przypadku większości polis (63 232 spośród 67 856) nie zgłoszono żadnej szkody. Jedynie dla dwóch z nich zgłoszono aż cztery roszczenia. Na tej podstawie możemy więc przypuszczać, iż najbardziej prawdopodobne jest to, że nie zostanie zgłoszone żadne roszczenie. Możemy także spróbować określić średnią liczbę szkód, która została zgłoszona dla jednej polisy w danym okresie. W omawianym przykładzie będzie to wartość bliska zero. Sama średnia nie zobrazuje w pełni zjawiska, gdyż (jak ukazują dane) możliwe jest, iż zgłoszona zostanie inna, potencjalnie większa liczba roszczeń – jedno, dwa, a nawet trzy lub cztery. Średnia powinna więc zostać uzupełniona o informację ukazującą odchylenie liczby

roszczeń od liczby średniej (por. rozważania na temat miar opisu rozkładu cech w rozdziale 2).

Tablica 6.1. Liczba roszczeń zgłoszonych dla polis OC posiadaczy pojazdów mechanicznych zakupionych w 2004 i 2005 r. w Australii

Liczba roszczeń	Liczba polis
0	63 232
1	4 333
2	271
3	18
4	2
Razem	67 856

Źródło: Opracowanie własne na podstawie pliku danych „ausprivauto0405” z [Dutang, Charpentier 2019].

W omawianym przypadku możemy stwierdzić, że prawdopodobieństwo braku roszczeń było bardzo duże, natomiast prawdopodobieństwo wystąpienia aż czterech roszczeń okazało się znikome. Wykorzystując poznaną już częstościową definicję prawdopodobieństwa, możemy oszacować wartość prawdopodobieństwa, że liczba roszczeń wyniesie odpowiednio 0, 1, 2, 3 lub 4. W tym celu liczbę polis, dla których zgłoszono daną liczbę roszczeń, musimy podzielić przez łączną liczbę wszystkich polis 67 856.

Liczba roszczeń z tytułu jednej polisy mogła przyjąć pięć różnych wartości, czyli 0, 1, 2, 3 lub 4. Ich realizacja następowała z różnym prawdopodobieństwem – mniejsza liczba roszczeń była bardziej prawdopodobna niż większa. Jest to przykład zmiennej losowej.

Definicja 6.2

Zmienna losowa jest funkcją, która każdemu zdarzeniu elementarnemu (czyli wynikowi danego eksperymentu) przyporządkowuje liczbę rzeczywistą.

Oznacza to, iż pewna wielkość (np. liczba roszczeń z tytułu jednej polisy w ciągu roku), która z pewnym prawdopodobieństwem przyjmuje różne wartości, jest zmienną losową. Możemy wyróżnić dwa rodzaje zmiennych losowych – skokowe i ciągłe.

Definicja 6.3

Zmienna losowa skokowa przyjmuje przeliczalną liczbę wartości.

Oznacza to, iż tak jak ma to miejsce w przypadku liczby roszczeń, dla każdych z dwóch następujących po sobie wartości zmienna ta nie może przyjąć żadnej wartości znajdującej się pomiędzy nimi. Liczba roszczeń z tytułu polisy OC może wynosić 0 lub 1, ale nie może to być 0,5 lub 0,75, jest to więc zmienna losowa skokowa.

Definicja 6.4

Zmienna losowa ciągła przyjmuje nieprzeliczalną liczbę wartości, a więc wszystkie wartości z danego przedziału lub wszystkie liczby rzeczywiste.

Przykładem takiej zmiennej jest wysokość odszkodowania, która może przyjąć dowolną wartość większą od zera.

Zmienną losową oznacza się zazwyczaj dużą literą – często X . Dla liczby szkód w zapisie matematyki ubezpieczeniowej wykorzystuje się jednak literę K . Tak więc w omawianym przykładzie zmienna losowa K , zdefiniowana jako liczba roszczeń zgłaszana dla jednej polisy OC sprzedanej w latach 2004–2005 w Australii, przyjmuje wartości od 0 do 4 włącznie, z prawdopodobieństwem przedstawionym w tablicy 6.2. Jest to tak zwany rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej.

Definicja 6.5

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej to funkcja, która każdej wartości zmiennej losowej przyporządkowuje jej prawdopodobieństwo.

Wartości zmiennej losowej oznaczane są małymi literami, np. $x_1, x_2, x_3, \dots$, natomiast odpowiadające im prawdopodobieństwa literą p , a więc: $p_1, p_2, p_3, \dots$ (tab. 6.2). Ważną cechą rozkładu prawdopodobieństwa jest to, iż suma wszystkich prawdopodobieństw zawsze wynosi 1.

Rozkład prawdopodobieństwa danej zmiennej losowej skokowej pozwala nam odczytać prawdopodobieństwo, z jakim zmienna przyjmie określoną wartość, czyli $P(K = x_i) = p_i$. W analizowanym przykładzie $P(K = 2) = 0,00399$, co oznacza, że prawdopodobieństwo, iż zmienna losowa K przyjmie wartość 2 (liczba roszczeń wyniesie dwa) jest równe 0,00399.

Tablica 6.2. Rozkład prawdopodobieństwa liczby roszczeń

Liczba roszczeń (x_i)	Prawdopodobieństwo (p_i)
0	0,93186
1	0,06386
2	0,00399
3	0,00026
4	0,00003
Razem	1,00000

Źródło: Opracowanie własne na podstawie pliku danych „ausprivauto0405” z [Dutang, Charpentier 2019].

Na podstawie rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej można ustalić kolejną opisującą go funkcję. Określamy ją mianem dystrybuanty.

Definicja 6.6

Dystrybuanta zmiennej losowej to funkcja dana wzorem $F(x_i) = P(K < x_i)$.

Dystrybuanta wyraża prawdopodobieństwo, iż zmienna losowa przyjmie wartość mniejszą od założonej. Aby ją obliczyć, sumujemy prawdopodobieństwa osiągnięcia wartości mniejszych niż zadana. Dla analizowanej zmiennej losowej skokowej, jaką jest liczba roszczeń, ilustruje to tablica 6.3.

Tablica 6.3. Dystrybuanta liczby roszczeń

Liczba roszczeń (x_i)	Prawdopodobieństwo (p_i)	Obliczanie dystrybuanty	Wartość dystrybuanty $F(x_i)$
0	0,93186	0	0
1	0,06386	$= 0 + 0,93186 =$	0,93186
2	0,00399	$= 0,93186 + 0,06386 =$	0,99572
3	0,00026	$= 0,99572 + 0,00399 =$	0,99971
4	0,00003	$= 0,99971 + 0,00026 =$	0,99997
Razem	1,00000	$= 0,99997 + 0,00003 =$	1,00000

Źródło: Opracowanie własne na podstawie pliku danych „ausprivauto0405” z [Dutang, Charpentier 2019].

Dystrybuanta pozwala nam odczytać prawdopodobieństwo, że zmienna losowa przyjmie wartość mniejszą niż zadana. Przykładowo,

prawdopodobieństwo, że liczba roszczeń będzie mniejsza niż 3 (a więc przyjmie wartość 0, 1 lub 2) wynosi 0,99971. Funkcja ta jednoznacznie definiuje rozkład prawdopodobieństwa. W przypadku zmiennych losowych ciągłych, które zostaną omówione w następnym podrozdziale, obliczenia wykonywane za pomocą dystrybuanty są prostsze niż przy użyciu rozkładów prawdopodobieństw.

Wiemy już, jakie jest prawdopodobieństwo wystąpienia określonej liczby roszczeń dla jednej polisy. Możemy teraz zastanowić się, jaka będzie średnia liczba roszczeń zgłoszonych z tytułu sprzedanych polis OC (oczywiście przy założeniu, iż rozkład prawdopodobieństwa liczby roszczeń dla polis sprzedanych w przyszłości nie zmieni się w stosunku do przedstawionego w tablicy 6.2). Na podstawie rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej obliczamy średnią, nazywaną wartością oczekiwaną. W przypadku zmiennej losowej skokowej sposób obliczania jest bardzo podobny do wyznaczania średniej arytmetycznej ważonej (por. rozdział 2.1): poszczególne wartości zmiennej należy pomnożyć przez odpowiadające im prawdopodobieństwo, a uzyskane wyniki zsumować [por. Keller 2012, s. 218; Crawshaw, Chambers 2001, s. 245]. W omawianym przykładzie wartość oczekiwaną liczby roszczeń $E(K)$ wyznaczamy następująco:

$$E(K) = 0 \times 0,93186 + 1 \times 0,06386 + 2 \times 0,00399 + 3 \times 0,00026 + 4 \times 0,00003 = 0,073$$

Wartość oczekiwana jest to więc średnia ważona liczba roszczeń, wykorzystująca jako wagi przypisane im prawdopodobieństwa. Uzyskany wynik oznacza, że z tytułu jednej polisy zakład ubezpieczeń może oczekiwać 0,073 roszczenia.

Analizując rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej, warto oprócz wartości oczekiwanej określić jego zróżnicowanie. W tym celu wykorzystuje się znane miary dyspersji, takie jak wariancja $D^2(K)$ i odchylenie standardowe $D(K)$. Wariancję obliczamy jako średnią ważoną kwadratów różnic pomiędzy wartościami zmiennej losowej a jej wartością oczekiwaną, ponownie wykorzystując prawdopodobieństwa jako wagi (por. rozdział 2.1) [Crawshaw, Chambers 2001, s. 249]. Dla omawianego przykładu wariancja wynosi:

$$D^2(K) = (0 - 0,073)^2 \times 0,93186 + (1 - 0,073)^2 \times 0,06386 + (2 - 0,073)^2 \times 0,00399 + (3 - 0,073)^2 \times 0,00026 + (4 - 0,073)^2 \times 0,00003 = 0,0773$$

Interpretacja wariancji jest mało intuicyjna, ze względu na występujące we wzorze potęgi kwadratowe. Z tego powodu oblicza się odchylenie standardowe, czyli pierwiastek kwadratowy z wariancji:

$$D(K) = \sqrt{0,0773} = 0,278$$

Oznacza to, że liczba roszczeń zgłaszanych z tytułu jednej polisy różni się średnio od wartości oczekiwanej o 0,278.

Kolejnym zagadnieniem związanym ze zmiennymi losowymi, które może być istotne dla zakładu ubezpieczeń, jest asymetria rozkładu, a więc określenie, czy bardziej prawdopodobne są liczby roszczeń większe czy też mniejsze niż ich średnia (por. rozdział 2.1). Moment trzeci względny oznaczany jako α_3 obliczamy podobnie jak wariancję, z tym że podnoszenie różnic do kwadratu zastąpione jest potęgą trzeciego stopnia. Następnie uzyskany wynik dzielimy przez odchylenie standardowe podniesione do trzeciej potęgi. Dla omawianego przykładu:

$$(0 - 0,073)^3 \times 0,93186 + (1 - 0,073)^3 \times 0,06386 + (2 - 0,073)^3 \times 0,00399 \\ + (3 - 0,073)^3 \times 0,00026 + (4 - 0,073)^3 \times 0,00003 = 0,0876$$

$$\text{Stąd } \alpha_3 = \frac{0,0876}{0,278^3} = 4,1.$$

Uzyskany wynik wskazuje, że rozkład liczby szkód charakteryzuje się bardzo silną asymetrią dodatnią, co oznacza, że dla większości polis liczba roszczeń z ich tytułu będzie mniejsza niż średnia wartość wynosząca 0,073.

Kolejne zastosowanie rozkładu zmiennej losowej to modelowanie wartości odszkodowania. Kwota odszkodowania może przybrać dowolną wartość nieujemną, tak więc możemy ją modelować za pomocą zmiennej losowej ciągłej X . Ważną różnicą pomiędzy zmiennymi skokowymi i ciągłymi jest to, iż dla zmiennej losowej ciągłej prawdopodobieństwo, iż przyjmie ona jedną, konkretną wartość wynosi 0 [szerzej: Ross 2002, s. 187]. Z tego powodu dla zmiennej ciągłej nie możemy wyznaczyć rozkładu prawdopodobieństwa $P(X = a)$, natomiast obliczamy prawdopodobieństwo, iż zmienna ta przyjmie wartość z określonego przedziału $P(a < X < b)$. Wiąże się to z obliczeniem pola powierzchni pod krzywą tak zwanej funkcji gęstości zmiennej losowej $f(x)$, a więc za pomocą całki.

Podobnie jak dla zmiennej skokowej, również dla zmiennej ciągłej dystrybuenta zdefiniowana jest jako $F(a) = P(X < a)$. Warto zauważyć, iż prawdopodobieństwo, iż zmienna losowa przyjmie wartości z zadanego przedziału

można obliczyć jako $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a)$, a więc z wykorzystaniem dystrybuanty.

Przykładowo, funkcja gęstości rozkładu zmiennej losowej opisującej wartość szkód (w euro) może wyglądać następująco:

$$f(x) = \begin{cases} -0,0002x + 0,02 & \text{dla } 0 < x < 100 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

Dystrybuanta, obliczana jako całka z funkcji gęstości, to:

$$F(x) = -0,0001x^2 + 0,02x$$

Prawdopodobieństwo, iż wysokość szkody będzie mniejsza niż 50 euro wynosi:

$$F(50) = -0,0001 \times 50^2 + 0,02 \times 50 = 0,75$$

Z kolei prawdopodobieństwo, iż wysokość szkody będzie mniejsza niż 100 euro wynosi:

$$F(100) = 0,0001 \times 100^2 + 0,02 \times 100 = 1$$

Prawdopodobieństwo wystąpienia szkody z danego przedziału oraz dystrybuantę przedstawia tablica 6.4.

Tablica 6.4. Prawdopodobieństwo wartości odszkodowań przy założonej funkcji gęstości rozkładu

Wartość odszkodowania (w euro)	Prawdopodobieństwo	Dystrybuanta
0–10	0,19	0,19
10–20	0,17	0,36
20–30	0,15	0,51
30–40	0,13	0,64
40–50	0,11	0,75
50–60	0,09	0,84
60–70	0,07	0,91
70–80	0,05	0,96
80–90	0,03	0,99
90–100	0,01	1,00
Razem	1,00	x

Źródło: Opracowanie własne.

Tak jak w przypadku zmiennej skokowej rozkład zmiennej losowej ciągłej można opisać za pomocą określonych parametrów. Ich obliczenie wymaga zastosowania metod całkowania [por. Ross 2002]. Dla omawianego przykładu wartość oczekiwana to $E(X) = 33,33$. Zakład ubezpieczeń może więc oczekiwać, iż wysokość odszkodowania dla tego rodzaju polis wyniesie średnio 33,33 euro. Jednak rzeczywista wysokość odszkodowania może być mniejsza lub większa. Zróżnicowanie to ilustruje wariancja, która wynosi $D^2(X) = 555,78$, oraz odchylenie standardowe, czyli pierwiastek z wariancji: $D(X) = \sqrt{555,78} = 23,57$. Tak więc średnio wysokości odszkodowań będą różnić się od wartości oczekiwanej wynoszącej 33,33 euro o 23,57 euro.

Aby zbadać asymetrię rozkładu, obliczamy moment trzeci względny, który wynosi $\alpha_3 = \frac{7407,81}{23,57^3} = 0,57$. Badany rozkład charakteryzuje się słabą asymetrią dodatnią, co oznacza, że nieco więcej odszkodowań będzie miało wartość mniejszą niż średnia 33,33 euro.

Po przeczytaniu rozdziału Czytelnik powinien:

- znać definicję miary probabilistycznej,
- znać różne definicje prawdopodobieństwa,
- umieć rozróżnić zmienne losowe skokowe i ciągłe,
- umieć wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej skokowej,
- umieć obliczyć parametry rozkładu prawdopodobieństwa: wartość oczekiwaną, wariancję, odchylenie standardowe.

Pytania sprawdzające

1. Jakie muszą być spełnione warunki, aby można było zastosować klasyczną definicję do obliczenia prawdopodobieństwa?
2. Podaj przykład zjawisk ubezpieczeniowych, które można modelować za pomocą zmiennej losowej skokowej i zmiennej losowej ciągłej.
3. Która z poniższych tablic przedstawia rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej, a która nie? Dlaczego?

A

Liczba szkód	0	1	2
Prawdopodobieństwo	0,5	0,5	0,1

B

Liczba szkód	0	1	2
Prawdopodobieństwo	0,4	0,5	0,1

C

Liczba szkód	0	1	2
Prawdopodobieństwo	-0,2	0,8	0,4

4. Jak zinterpretować wartość oczekiwaną zmiennej losowej?
5. Która miara rozproszenia jest łatwiejsza w interpretacji – wariancja czy odchylenie standardowe? Dlaczego?

Rozdział 7

Własności i zastosowanie wybranych rozkładów zmiennych losowych

Anna Gierusz

Hasła: rozkład dwumianowy, rozkład Poissona, rozkład jednostajny, rozkład normalny, rozkład wykładniczy, rozkład chi kwadrat, aproksymacja rozkładem

7.1. Własności wybranych rozkładów skokowych opisujących liczbę szkód

Liczba szkód jest zmienną losową skokową, która może być opisana wieloma teoretycznymi rozkładami prawdopodobieństwa. Najbardziej znane spośród nich to rozkład zero-jedynkowy, dwumianowy oraz Poissona.

Rozkład zero-jedynkowy

Jest to najprostszy rozkład zmiennej losowej skokowej. Zakładamy, iż zmienna losowa może przyjąć tylko dwie wartości: jeden lub zero. Jeżeli chcemy wykorzystać go do modelowania liczby szkód w ubezpieczeniach, rozpatrujemy prosty przypadek, gdy szkoda wystąpiła lub nie. Jeżeli prawdopodobieństwo wystąpienia szkody wynosi p , wówczas prawdopodobieństwo, iż szkody nie było wynosi $1 - p$ (prawdopodobieństwa muszą sumować się do jedynki). Rozkład prawdopodobieństwa możemy wówczas zapisać jako:

$$\begin{aligned}P(K = 1) &= p \\P(K = 0) &= 1 - p\end{aligned}\tag{7.1}$$

Wartość oczekiwana w tym przypadku wynosi p , a wariancja $p(1 - p)$. Rozkład ten możemy wykorzystać na przykład przy modelowaniu indywidualnego ubezpieczenia na życie.

Przykład 7.1

Prawdopodobieństwo wypłaty w indywidualnym ubezpieczeniu na życie wynosi 0,1. Wartość oczekiwana liczby roszczeń to 0,1, wariancja wynosi 0,09, a odchylenie standardowe 0,3, czyli średnio liczba roszczeń będzie się różnić od wartości oczekiwanej o 0,3.

Rozkład zero-jedynkowy możemy rozszerzyć na większą liczbę możliwych zdarzeń niż tylko zero lub jeden. Nazywa się on wówczas rozkładem dwumianowym.

Rozkład dwumianowy

Zakładamy, iż zmienna losowa przyjmuje przeliczalną liczbę wartości – liczby całkowite od zera do pewnego określonego maksimum. Możemy więc wykorzystać ten rozkład do modelowania liczby szkód w grupowym ubezpieczeniu na życie, gdzie grupa składa się z określonej liczby uczestników. Aby można było wykorzystać rozkład dwumianowy, spełnione muszą być dwa założenia. Po pierwsze, prawdopodobieństwo roszczenia musi być takie samo dla każdej jednostki (każdego uczestnika). Po drugie, roszczenia muszą być niezależne, a więc wystąpienie jednego z nich nie może mieć wpływu na prawdopodobieństwo wystąpienia kolejnych roszczeń [Aczel 1989, s. 93].

Wzór na prawdopodobieństwo rozkładu dwumianowego wygląda następująco:

$$(K = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n \quad (7.2)$$

gdzie n to liczba wszystkich uczestników, p oznacza natomiast prawdopodobieństwo indywidualnego roszczenia, x – liczba roszczeń.

Przykład 7.2

Firma zatrudniająca osiem osób wykupiła dla pracowników grupowe ubezpieczenie na życie. Szacuje, iż prawdopodobieństwo wystąpienia z roszczeniem wynosi dla każdego ubezpieczonego 0,1.

Prawdopodobieństwo, iż spośród ośmiu pracowników zostaną zgłoszone dwa roszczenia ($P(K = 2)$) obliczamy następująco:

$$P(K = 2) = \binom{8}{2} 0,1^2 0,9^6 = 0,1488$$

Każde roszczenie zgłaszane jest z prawdopodobieństwem 0,1. Obliczane jest prawdopodobieństwo dwóch niezależnych roszczeń, a więc $0,1^2$. Pozostałe sześć osób nie zgłosi roszczenia (brak roszczenia ma prawdopodobieństwo $1 - 0,1 = 0,9$), a więc $0,9^6$. Wyrażenie $\binom{8}{2}$ wyznacza liczbę możliwych kombinacji dwóch roszczeń zgłoszonych spośród ośmiu pracowników.

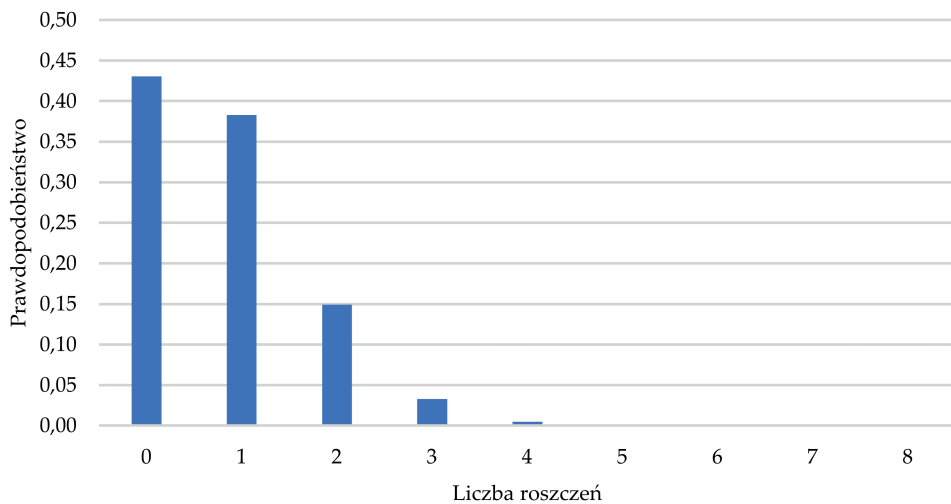
W analogiczny sposób możemy obliczyć prawdopodobieństwa dla pozostałych wartości zmiennej losowej. Przedstawiono je w tablicy 7.1.

Tablica 7.1. Prawdopodobieństwa rozkładu dwumianowego dla $n = 8$ (ośmiu pracowników), $p = 0,1$ (prawdopodobieństwo roszczenia to 0,1)

Liczba roszczeń	Sposób obliczania	Prawdopodobieństwo
0	$P(K = 0) = \binom{8}{0} 0,1^0 0,9^8 =$	0,4305
1	$P(K = 1) = \binom{8}{1} 0,1^1 0,9^7 =$	0,3826
2	$P(K = 2) = \binom{8}{2} 0,1^2 0,9^6 =$	0,1488
3	$P(K = 3) = \binom{8}{3} 0,1^3 0,9^5 =$	0,0331
4	$P(K = 4) = \binom{8}{4} 0,1^4 0,9^4 =$	0,0046
5	$P(K = 5) = \binom{8}{5} 0,1^5 0,9^3 =$	0,0004
6	$P(K = 6) = \binom{8}{6} 0,1^6 0,9^2 =$	0,00002
7	$P(K = 7) = \binom{8}{7} 0,1^7 0,9^1 =$	0,0000007
8	$P(K = 8) = \binom{8}{8} 0,1^8 0,9^0 =$	0,00000001

Źródło: Opracowanie własne.

Wyznaczony w ten sposób rozkład prawdopodobieństwa możemy przedstawić na wykresie (rys. 7.1).



Rysunek 7.1. Prawdopodobieństwa rozkładu dwumianowego dla $n = 8$, $p = 0,1$

Źródło: Opracowanie własne.

Możemy zauważyć, iż najbardziej prawdopodobną liczbą roszczeń jest 0. Im większa liczba roszczeń, tym mniejsze prawdopodobieństwo przypisuje takiemu zdarzeniu rozkład dwumianowy. Jaka będzie średnia liczba roszczeń? Dla rozkładu dwumianowego wzór na wartość oczekiwaną to $E(K) = n \times p$. W omawianym przykładzie wartość oczekiwana to $E(K) = 8 \times 0,1 = 0,8$. Wariancja natomiast wynosi $D^2(K) = n \times p \times (1 - p) = 8 \times 0,1 \times 0,9 = 0,72$, a odchylenie standardowe $D = \sqrt{0,72} = 0,85$. Oznacza to, iż zakład ubezpieczeń może spodziewać się 0,8 roszczenia w przypadku grupowego ubezpieczenia na życie ośmiu pracowników, przy czym średnio liczba roszczeń będzie różnić się od wartości oczekiwanej o 0,85 roszczenia.

Rozkład dwumianowy jest rozkładem niesymetrycznym, poza przypadkiem gdy prawdopodobieństwo $p = 0,5$. Moment trzeci względny oblicza się według wzoru:

$$\alpha_3 = \frac{1 - 2p}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{1 - 2 \times 0,1}{\sqrt{8 \times 0,1 \times 0,9}} = 0,94$$

W omawianym przypadku występuje więc umiarkowana asymetria dodatnia.

Rozkład Poissona

Kolejny rozkład, który bardzo często wykorzystuje się do modelowania liczby szkód, to rozkład Poissona. W przeciwieństwie do rozkładu dwumianowego nie wymaga, aby została z góry określona maksymalna liczba szkód⁷⁷, możemy więc wykorzystać go do modelowania liczby szkód, np. na polisach OC posiadaczy pojazdów mechanicznych. Należy założyć, iż średnia liczba szkód (w danym okresie, np. w ciągu roku) jest znana i skończona. Wzór na prawdopodobieństwo rozkładu Poissona to:

$$P(K = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (7.3)$$

gdzie λ to średnia liczba roszczeń, e natomiast to stała Eulera (wynosząca około 2,72).

Przykład 7.3

Średnia liczba zgłoszonych roszczeń na polisach OC posiadaczy pojazdów mechanicznych w ciągu roku wynosi 1,2. Prawdopodobieństwo, iż w ciągu roku zostaną zgłoszone dwa roszczenia oblicza się następująco:

$$P(K = 2) = \frac{e^{-1,2} 1,2^2}{2!} = 0,2169$$

W analogiczny sposób możemy obliczyć prawdopodobieństwa dla pozostałych wartości zmiennej losowej. Przedstawiono je w tablicy 7.2.

Tablica 7.2. Prawdopodobieństwa rozkładu Poissona dla $\lambda = 1,2$

Liczba roszczeń	Sposób obliczania	Prawdopodobieństwo
0	$P(K = 0) = \frac{e^{-1,2} 1,2^0}{0!} =$	0,3012
1	$P(K = 1) = \frac{e^{-1,2} 1,2^1}{1!} =$	0,3614
2	$P(K = 2) = \frac{e^{-1,2} 1,2^2}{2!} =$	0,2169
3	$P(K = 3) = \frac{e^{-1,2} 1,2^3}{3!} =$	0,0867

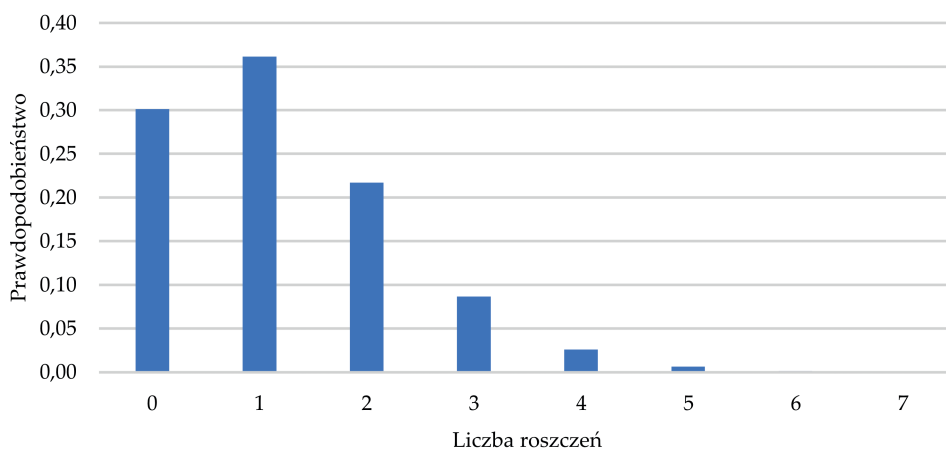
⁷⁷ Więcej o rozkładzie Poissona np. w: [Crawshaw, Chambers 2001, s. 292].

Tablica 7.2. cd.

Liczba roszczeń	Sposób obliczania	Prawdopodobieństwo
4	$P(K = 4) = \frac{e^{-1,2} 1,2^4}{4!} =$	0,0260
5	$P(K = 5) = \frac{e^{-1,2} 1,2^5}{5!} =$	0,0062
6	$P(K = 6) = \frac{e^{-1,2} 1,2^6}{6!} =$	0,0012
7	$P(K = 7) = \frac{e^{-1,2} 1,2^7}{7!} =$	0,0002
itd.	...	...

Źródło: Opracowanie własne.

Prawdopodobieństwa wyznaczone dla kolejnych, wyższych liczb roszczeń, czyli 8, 9, 10..., będą coraz mniejsze. Obliczone prawdopodobieństwa przedstawia rysunek 7.2.

Rysunek 7.2. Prawdopodobieństwa rozkładu Poissona dla $\lambda = 1,2$

Źródło: Opracowanie własne.

Według przyjętego modelu Poissona najbardziej prawdopodobną liczbą szkód jest 1. Wartości większe od 5 charakteryzują się bardzo małym prawdopodobieństwem.

W rozkładzie Poissona wartość oczekiwana równa jest λ ($E(K) = \lambda$), co oznacza, że w omawianym przykładzie $E(K) = 1,2$. Wariancja to również λ , czyli $D^2(K) = \lambda = 1,2$, a odchylenie standardowe $D = \sqrt{1,2} = 1,095$. Możemy więc oczekiwać średnio 1,2 roszczenia w ciągu roku, przy czym rzeczywista liczba roszczeń średnio różni się od wartości oczekiwanej o 1,095. Z kolei moment trzeci względny to $\alpha_3 = \lambda^{-0,5} = 1,2^{-0,5} = 0,91$. Wskazuje, że występuje tu umiarkowana asymetria dodatnia. Więcej polis będzie więc charakteryzowało się mniejszą liczbą roszczeń niż wartość oczekiwana wynosząca 1,2.

7.2. Własności wybranych rozkładów ciągłych opisujących wartości odszkodowań

Wartość odszkodowań wypłacanych przez zakład ubezpieczeń to zmienna losowa ciągła, która może być opisywana wieloma rozkładami teoretycznymi. Do najczęściej stosowanych należą rozkład jednostajny, normalny, wykładniczy oraz chi kwadrat. Znając rozkład zmiennej losowej ciągłej, możemy obliczyć prawdopodobieństwo, iż zmienna losowa (np. wysokość zgłoszonej szkody) przyjmie wartość z pewnego przedziału.

Rozkład jednostajny

Założeniem rozkładu jednostajnego jest stała funkcja gęstości, co oznacza identyczne prawdopodobieństwo, iż wysokość szkody znajdzie się w tak samo szerokich przedziałach, np. od 0 do 100 zł, od 100 do 200 zł, od 200 do 300 zł itd. Można go więc wykorzystać do modelowania szkód, które z takim samym prawdopodobieństwem przyjmą wartość niską, umiarkowaną lub wysoką. Wzór na dystrybuantę rozkładu jednostajnego w przedziale (a, b) to:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{dla } a < x < b \\ 1 & \text{dla } x \geq b \end{cases} \quad (7.4)$$

Funkcja gęstości jest funkcją stałą, o wzorze:

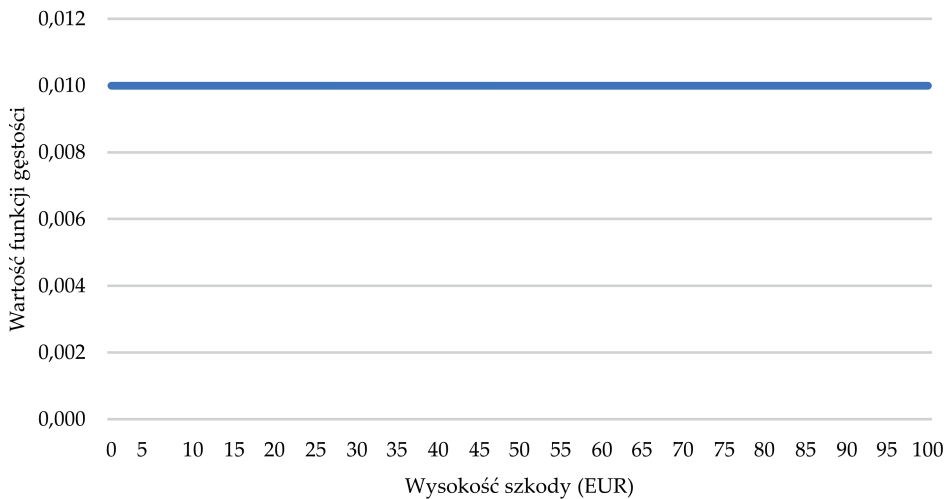
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dla } a < x < b \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases} \quad (7.5)$$

Przykład 7.4

Wysokość szkody komunikacyjnej ma rozkład jednostajny w przedziale od 0 do 100 euro z dystrybuantą postaci:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{x}{100} & \text{dla } 0 < x < 100 \\ 1 & \text{dla } x \geq 100 \end{cases}$$

W tym wypadku prawdopodobieństwo, że wysokość szkody będzie zawierać się np. w przedziale od 10 do 20 to $F(20) - F(10) = \frac{20}{100} - \frac{10}{100} = 0,1$. Prawdopodobieństwo, że szkoda przyjmie wartości z przedziału od 20 do 30 to $F(30) - F(20) = \frac{30}{100} - \frac{20}{100} = 0,1$, a prawdopodobieństwo, że wysokość szkody będzie zawierać się w przedziale od 40 do 50 wynosi $F(50) - F(40) = \frac{50}{100} - \frac{40}{100} = 0,1$ i tak dalej. W omawianym przykładzie funkcja gęstości prezentuje się jak na rysunku 7.3.



Rysunek 7.3. Funkcja gęstości rozkładu jednostajnego w przedziale (0, 100)

Źródło: Opracowanie własne.

Wartość oczekiwana tego rozkładu wyrażona jest jako $E(X) = \frac{a+b}{2}$, a wariancja to $D^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$. Rozkład ten jest zawsze symetryczny. W przypadku rozkładu jednostajnego średnia wartość szkody to po prostu środek przedziału,

który w analizowanym przypadku wynosi 50. Wariancja wynosi 833,33, a odchylenie standardowe jest równe $D(X) = \sqrt{833,33} = 28,87$.

Rozkład normalny

Bardzo często stosowanym rozkładem zmiennej losowej ciągłej jest rozkład normalny. Rozkład ten jest symetryczny. Gdy modelujemy za jego pomocą wysokość szkód, oznacza to, iż z największym prawdopodobieństwem szkoda przyjmie wartość zbliżoną do średniej, a im większa różnica pomiędzy wysokością szkody a średnią, tym mniejsze jej prawdopodobieństwo. Funkcja gęstości tego rozkładu opisana jest wzorem:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ dla } x \in \mathbb{R} \quad (7.6)$$

Wartości prawdopodobieństwa podane są w tablicach statystycznych, a także dostępne w pakietach komputerowych przystosowanych do obliczeń statystycznych.

Wykres funkcji gęstości rozkładu normalnego to charakterystyczna krzywa w kształcie dzwonu, symetryczna. Jest zdefiniowana dwoma parametrami: wartością oczekiwaną μ , która określa położenie krzywej względem osi x , oraz odchyleniem standardowym σ , określającym, jak spłaszczony czy smukły jest kształt. Zmienna losowa opisana rozkładem normalnym może przyjąć dowolną wartość, także ujemną, z tego powodu może on być nieodpowiedni do modelowania niektórych zjawisk ubezpieczeniowych.

Przykład 7.5

Zakład ubezpieczeń szacuje, iż wysokość odszkodowań ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej 50 euro i odchyleniu standardowym 12 euro. Prawdopodobieństwa dla określonych przedziałów odczytane z tablic rozkładu normalnego przedstawia tablica 7.3.

Tablica 7.3. Prawdopodobieństwo wartości odszkodowań dla rozkładu normalnego z parametrami $\mu = 50$, $\sigma = 12$

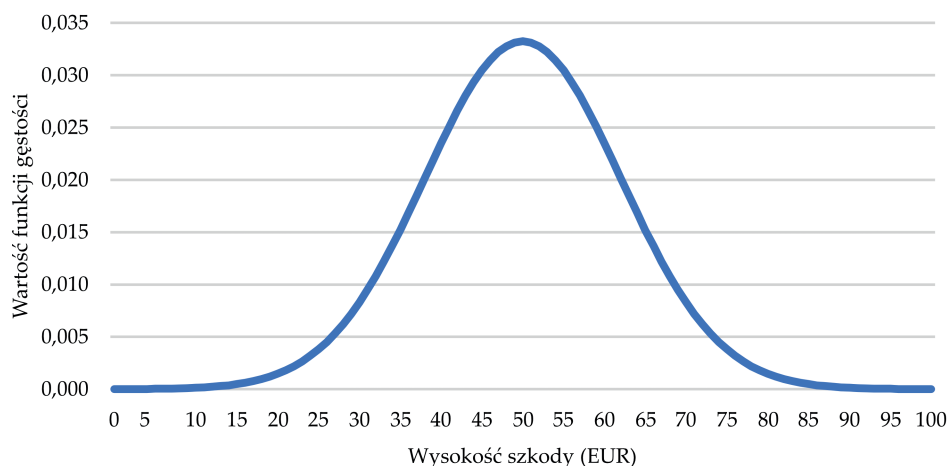
Wartość odszkodowania	Prawdopodobieństwo	Dystrybuanta
0–10	0,0004	0,0004
10–20	0,0058	0,0062
20–30	0,0416	0,0478

Tablica 7.3. cd.

Wartość odszkodowania	Prawdopodobieństwo	Dystrybuanta
30–40	0,1545	0,2023
40–50	0,2977	0,5000
50–60	0,2977	0,7977
60–70	0,1545	0,9522
70–80	0,0416	0,9938
80–90	0,0058	0,9996
90–100	0,0004	1,0000
Powyżej 100	0,0000	X

Źródło: Opracowanie własne.

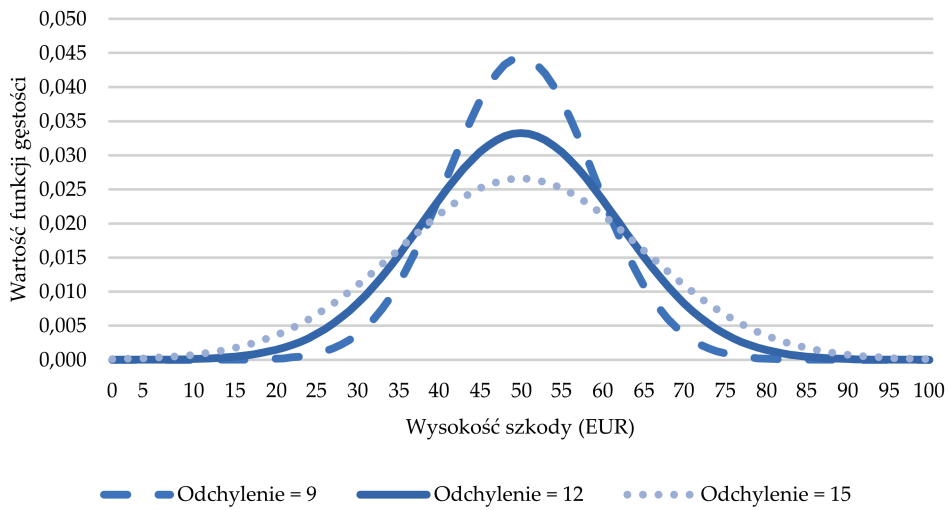
Możemy zauważyć, że prawdopodobieństwa początkowo rosną, maksimum osiągają w przedziałach 40–50 oraz 50–60, a następnie maleją. Uwagę zwraca także symetria rozkładu, co widać na rysunku 7.4.



Rysunek 7.4. Funkcja gęstości rozkładu normalnego z parametrami $\mu = 50$, $\sigma = 12$

Źródło: Opracowanie własne.

Zmiana wartości oczekiwanej nie wpłynie na kształt krzywej, powodując jedynie przesunięcie wykresu w lewo lub w prawo. Natomiast zmiana wartości odchylenia standardowego zmodyfikuje kształt wykresu – im większa wartość odchylenia, tym niższy i bardziej spłaszczony będzie kształt krzywej (rys. 7.5).



Rysunek 7.5. Funkcja gęstości rozkładu normalnego dla różnych wartości odchylenia standardowego i średniej równej 50

Źródło: Opracowanie własne.

Rozkład wykładniczy

Jest to rozkład niesymetryczny, o asymetrii prawostronnej. Zmienna losowa o rozkładzie wykładniczym przyjmuje wartości nieujemne, przez co często model wykładniczy wykorzystywany jest w ubezpieczeniach do opisu wysokości szkód. Asymetria oznacza, iż z największym prawdopodobieństwem wystąpią szkody o niskiej wysokości, a im wyższa wysokość szkody, tym mniejsze prawdopodobieństwo jej wystąpienia.

Funkcja gęstości rozkładu wykładniczego ma następujący wzór:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ dla } x \geq 0, 0 \text{ dla } x < 0 \quad (7.7)$$

dystrybuanta natomiast opisana jest jako

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ dla } x \geq 0, 0 \text{ dla } x < 0 \quad (7.8)$$

Rozkład wykładniczy charakteryzuje jeden parametr λ , będący odwrotnością średniej. Wartość oczekiwana zmiennej losowej to $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, a wariancja $D^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Przykład 7.6

Do modelowania wysokości szkód zakład ubezpieczeń wykorzystuje rozkład wykładniczy, z parametrem λ równym 0,04. Prawdopodobieństwa obliczone dla określonych przedziałów wartości odszkodowania przedstawia tablica 7.4, a wykres funkcji gęstości rysunek 7.6.

Tablica 7.4. Prawdopodobieństwo wartości odszkodowań dla rozkładu wykładniczego z $\lambda = 0,04$

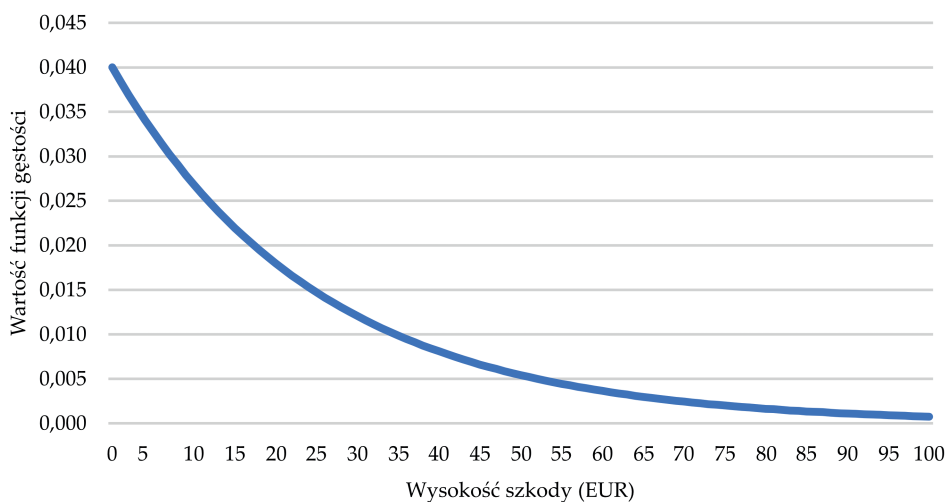
Wartość odszkodowania	Prawdopodobieństwo	Dystrybuanta
0–10	0,3297	0,3297
10–20	0,2210	0,5507
20–30	0,1481	0,6988
30–40	0,0993	0,7981
40–50	0,0666	0,8647
50–60	0,0446	0,9093
60–70	0,0299	0,9392
70–80	0,0200	0,9592
80–90	0,0134	0,9727
90–100	0,0090	0,9817
Powyżej 100	0,0183	1,0000

Źródło: Opracowanie własne.

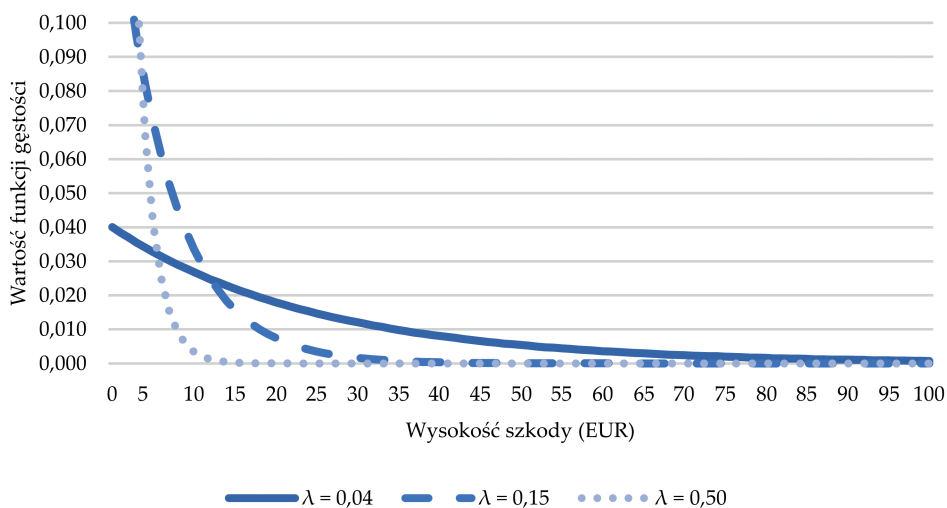
Z rysunku 7.6 wynika, że prawdopodobieństwa w rozkładzie wykładniczym maleją w miarę wzrostu wartości odszkodowania.

Możemy zauważyć, iż coraz wyższe wartości szkody charakteryzują się coraz mniejszym prawdopodobieństwem ich realizacji. Wartość oczekiwana zmiennej losowej w omawianym przykładzie wynosi $E(X) = \frac{1}{0,04} = 25$, a wariancja $D^2(X) = 625$, z odchyleniem standardowym równym $D(X) = \sqrt{625} = 25$. Moment trzeci względny w przypadku tego rozkładu zawsze wynosi 2, a więc rozkład wykładniczy charakteryzuje się silną asymetrią dodatnią.

Zmiana wartości parametru λ zmodyfikuje kształt wykresu – ukazuje to rysunek 7.7.

Rysunek 7.6. Funkcja gęstości rozkładu wykładniczego z $\lambda = 0,04$

Źródło: Opracowanie własne.

Rysunek 7.7. Funkcja gęstości rozkładu wykładniczego dla różnych wartości λ

Źródło: Opracowanie własne.

Rozkład chi kwadrat

Podobnie jak wykładniczy, również rozkład chi kwadrat jest niesymetryczny. Zmienna losowa przyjmuje wyłącznie wartości nieujemne, a więc można wykorzystać go do modelowania wysokości szkód. W przeciwieństwie do rozkładu wykładniczego, który przypisywał największe prawdopodobieństwo szkodom w najmniejszej wysokości, kształt rozkładu chi kwadrat można zmodyfikować tak, iż z największym prawdopodobieństwem wystąpią szkody w wysokości zbliżonej do średniej. Funkcja gęstości tego rozkładu przyjmuje kształt zależny od jednego parametru, tak zwanych stopni swobody v , co wyraża wzór:

$$f(x) = \frac{0,5^{v/2}}{\Gamma(v/2)} x^{v/2-1} e^{-x/2} \text{ dla } x \geq 0, 0 \text{ dla } x < 0 \quad (7.9)$$

gdzie $\Gamma(v/2)$ to wartość funkcji gamma [Ross 2002, s. 218]. Wartość oczekiwana równa jest liczbie stopni swobody, natomiast wariancja to dwukrotność liczby stopni swobody.

Przykład 7.7

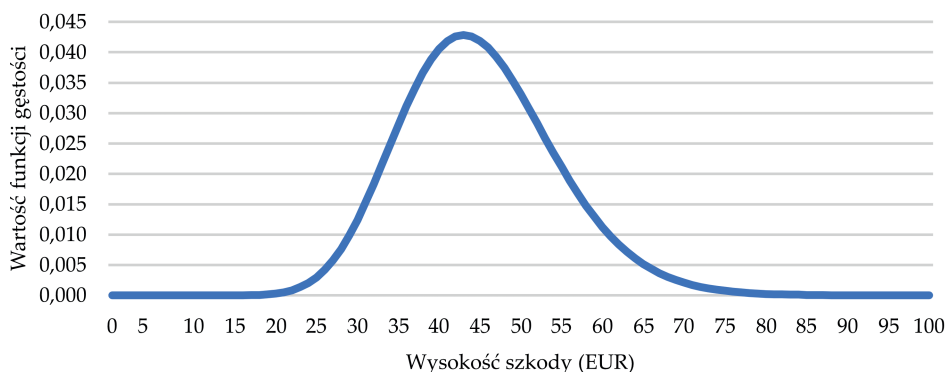
Do oszacowania prawdopodobieństwa wysokości szkód zakład ubezpieczeń wykorzystuje rozkład chi kwadrat, z parametrem v równym 45. Wartości prawdopodobieństwa obliczone dla określonych przedziałów przedstawia tabela 7.5, a wykres funkcji gęstości rysunek 7.8.

Tablica 7.5. Prawdopodobieństwo wartości odszkodowań dla rozkładu chi kwadrat z $v = 45$

Wartość odszkodowania	Prawdopodobieństwo	Dystrybuanta
0–10	0,0000	0,0000
10–20	0,0005	0,0005
20–30	0,0414	0,0419
30–40	0,2748	0,3167
40–50	0,4018	0,7185
50–60	0,2149	0,9334
60–70	0,0567	0,9901
70–80	0,0089	0,9990
80–90	0,0009	0,9999
90–100	0,0001	1,0000
Powyżej 100	0,0000	x

Źródło: Opracowanie własne.

Prawdopodobieństwa realizacji badanej zmiennej losowej początkowo rosną wraz ze wzrostem wartości odszkodowania, następnie maleją, co ilustruje rysunek 7.8.

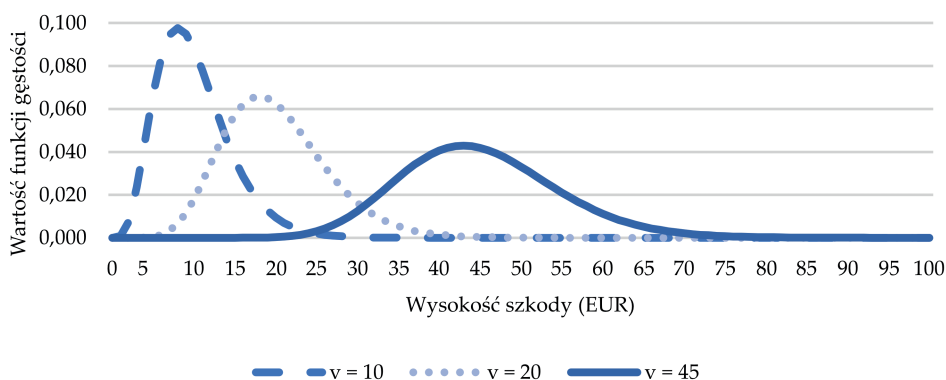


Rysunek 7.8. Funkcja gęstości rozkładu chi kwadrat z $v = 45$

Źródło: Opracowanie własne.

Dla omawianego przykładu $E(X) = v = 45$, $D^2(X) = 2v = 90$. Moment trzeci względny to $\alpha_3 = \sqrt{8/v} = \sqrt{8/45} = 0,42$, co wskazuje na słabą asymetrię dodatnią.

Zmiana wartości parametru v zmodyfikuje kształt wykresu (rys. 7.9).



Rysunek 7.9. Funkcja gęstości rozkładu chi kwadrat dla różnych wartości v

Źródło: Opracowanie własne.

7.3. Aproksymacja rozkładów liczby szkód i rozkładów wartości odszkodowań

W poprzednich podrozdziałach zastosowaliśmy zmienne losowe i ich rozkłady do wskazania oczekiwanej przez zakład ubezpieczeń liczby szkód lub wysokości odszkodowań. Dobór odpowiedniego rozkładu ma tu kluczowe znaczenie. Aby stwierdzić, który rozkład najlepiej odzwierciedla zjawiska istotne dla zakładu ubezpieczeń, porównuje się dane rzeczywiste (np. liczbę polis, dla których zgłoszono określoną liczbę roszczeń) z wartościami, których moglibyśmy się spodziewać, mając do czynienia z danym rozkładem zmiennej losowej. Proces ten określa się mianem aproksymacji rozkładu zmiennej losowej.

Przykład 7.8

Zakład ubezpieczeń chce wykorzystać rozkład Poissona w celu obliczenia prawdopodobieństwa określonej liczby roszczeń zgłoszonych dla jednej polisy. Rozkład ten charakteryzuje jeden parametr, λ , oznaczający średnią liczbę roszczeń. Pierwszym krokiem do sprawdzenia, na ile rozkład Poissona odzwierciedla rzeczywisty rozkład prawdopodobieństwa liczby roszczeń, jest więc obliczenie średniej liczby roszczeń na podstawie danych rzeczywistych, co ukazuje tablica 7.6.

Tablica 7.6. Liczba roszczeń dla polis OC posiadaczy pojazdów mechanicznych zgłoszonych do francuskiego zakład ubezpieczeń w okresie od stycznia 2003 do czerwca 2004 r.

Liczba roszczeń	Liczba klientów	Liczba roszczeń $\times$ liczba klientów
0	397 779	0
1	14 633	14 633
2	726	1 452
3	28	84
4	3	12
Razem	413 169	16 181

Źródło: Opracowanie własne na podstawie pliku danych „fremotorclaim” z [Dutang, Charpentier 2019].

Przyjmujemy, iż parametr rozkładu równy jest średniej liczbie roszczeń: $\lambda = \frac{16\,181}{413\,169} = 0,0392$. Teraz możemy obliczyć prawdopodobieństwa teoretyczne, zgodne z rozkładem Poissona dla każdej możliwej liczby zgłoszonych roszczeń. Pozwoli to następnie na obliczenie wartości oczekiwanych, a więc

liczby klientów zgłaszających daną liczbę roszczeń według rozkładu Poissona, co nastąpi poprzez pomnożenie prawdopodobieństwa przez łączną liczbę klientów 413 169 (tab. 7.7).

Tablica 7.7. Aproksymacja liczby roszczeń dla polis OC posiadaczy pojazdów mechanicznych zgłoszonych do francuskiego zakład ubezpieczeń w okresie od stycznia 2003 do czerwca 2004 r. rozkładem Poissona

Liczba roszczeń	Liczba klientów	Prawdopodobieństwo rozkładu Poissona	Oczekiwana liczba klientów
0	397 779	0,96159	397 301
1	14 633	0,03766	15 560
2	726	0,00074	305
3	28	0,00001	4
4	3	0,00000	0
Razem	413 169	1,00000	413 169

Źródło: Opracowanie własne na podstawie pliku danych „fremotorclaim” z [Dutang, Charpentier 2019].

Możemy zauważyć, iż w przypadku braku roszczeń liczba oczekiwana (397 301) jest dość zbliżona do wartości zaobserwowanej (397 779). Jednak dla większej liczby roszczeń równej 3 lub 4 różnice są już większe. Aby ocenić, na ile dobrym modelem jest dla podanego zbioru danych rozkład Poissona, możemy wykorzystać bardziej zaawansowane metody statystyczne [por. Ross 2010, s. 605; Shao 2003, s. 436].

Przykład 7.9

Zakład ubezpieczeń zamierza wykorzystać rozkład wykładniczy w celu obliczenia prawdopodobieństwa określonej wysokości odszkodowania. Rozkład ten charakteryzuje jeden parametr λ , obliczany jako odwrotność średniej wysokości roszczenia. Pierwszym krokiem do zbadania, na ile wskazany rozkład jest odpowiedni dla opisu wysokości odszkodowań jest więc obliczenie średniej wysokości roszczenia na podstawie danych rzeczywistych, jakie ukazuje tablica 7.8.

Tablica 7.8. Przykładowy rozkład wysokości odszkodowań

Wysokość odszkodowania (USD)	Liczba roszczeń
0–2000	488
2000–4000	115
4000–6000	92
6000–8000	54
8000–10 000	33
10 000–12 000	19
12 000–14 000	15
14 000–16 000	15
16 000–18 000	7
18 000–20 000	4
Razem	842

Źródło: [Hossack, Pollard, Zehnwirth 1992, s. 39].

Dla omawianego zestawu danych średnia wysokość odszkodowania to 3316, a więc odwrotność średniej to $\lambda = \frac{1}{3316} = 0,0003$. Na podstawie tak obliczonej wartości λ wyznaczane są prawdopodobieństwa według rozkładu wykładniczego, a następnie oczekiwana liczba roszczeń według rozkładu wykładniczego (tab. 7.9).

Tablica 7.9. Aproksymacja rozkładu wysokości odszkodowań dla przykładowych danych

Wysokość odszkodowania (USD)	Liczba roszczeń	Prawdopodobieństwo według rozkładu wykładniczego	Oczekiwana liczba roszczeń
0–2000	488	0,4529	381,4
2000–4000	115	0,2478	208,6
4000–6000	92	0,1356	114,1
6000–8000	54	0,0742	62,4
8000–10 000	33	0,0406	34,2
10 000–12 000	19	0,0222	18,7
12 000–14 000	15	0,0121	10,2
14 000–16 000	15	0,0066	5,6
16 000–18 000	7	0,0036	3,1
18 000–20 000	4	0,0044	3,7
Razem	842	1,0000	842

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [Hossack, Pollard, Zehnwirth 1992, s. 39].

Ten rozkład stosunkowo dobrze odwzorowuje liczebności dla umiarkowanej wysokości szkód. Na przykład dla przedziału (8000–10 000) liczebność zaobserwowana to 33, a oczekiwana to 34,2. Jednak dla niskich i wysokich wartości odszkodowań wartości zaobserwowane i oczekiwane różnią się dość znacznie.

Przykład 7.10

Zakład ubezpieczeń zamierza określić prawdopodobieństwo wystąpienia określonej wysokości odszkodowania. Wykorzysta w tym celu różne rozkłady zmiennej losowej ciągłej. Tablica 7.10 przedstawia rzeczywiste dane.

Tablica 7.10. Wartość odszkodowań dla polis OC posiadaczy pojazdów mechanicznych wypłaconych przez francuski zakład ubezpieczeń w okresie od stycznia 2003 do czerwca 2004 r.

Wartość odszkodowania (euro)	Liczba roszczeń
0–1000	12 661
1000–2000	2 532
2000–3000	1 111
3000–4000	503
4000–5000	309
5000–6000	260
6000–7000	139
7000–8000	120
8000–9000	64
9000–10 000	43
powyżej 10 000	315
Razem	18 057

Źródło: Opracowanie własne na podstawie pliku danych „fremotorclaim” z [Dutang, Charpentier 2019].

Aproksymacja rozkładem jednostajnym

Rozkład jednostajny określony jest dla zamkniętego obustronnie przedziału, a więc ostatni przedział nie może pozostać otwarty tak jak w tablicy 7.10. Zakładając, iż górna granica tego przedziału to 11 000, funkcja gęstości to $f(x) = \frac{1}{11\,000}$ dla $0 < x < 11\,000$. Na jej podstawie obliczane są prawdopodobieństwa wyznaczone według rozkładu jednostajnego, a następnie liczba roszczeń zgodna z tym rozkładem (tab. 7.11).

Tablica 7.11. Aproksymacja wartości odszkodowań wypłaconych przez francuski zakład ubezpieczeń w okresie od stycznia 2003 do czerwca 2004 r. rozkładem jednostajnym

Wartość odszkodowania (euro)	Liczba roszczeń	Prawdopodobieństwo według rozkładu jednostajnego	Oczekiwana liczba roszczeń
0–1000	12 661	0,0909	1642
1000–2000	2 532	0,0909	1642
2000–3000	1 111	0,0909	1642
3000–4000	503	0,0909	1642
4000–5000	309	0,0909	1642
5000–6000	260	0,0909	1642
6000–7000	139	0,0909	1642
7000–8000	120	0,0909	1642
8000–9000	64	0,0909	1642
9000–10 000	43	0,0909	1642
powyżej 10 000	315	0,0909	1642
Razem	18 057	1,0000	18 057

Źródło: Opracowanie własne na podstawie pliku danych „fremotorclaim” z [Dutang, Charpentier 2019].

Możemy zauważyć, iż rozkład jednostajny nie jest dobrym modelem dla analizowanych wartości odszkodowań. Liczba roszczeń maleje bowiem wraz ze wzrostem wysokości odszkodowania, natomiast rozkład jednostajny zakłada takie same wartości prawdopodobieństwa oraz liczebności we wszystkich przedziałach.

Aproksymacja rozkładem normalnym

Rozkład normalny zdefiniowany jest przez dwa parametry – wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe. Można oszacować ich wartość na podstawie średniej i odchylenia standardowego obliczonych na podstawie zestawu danych. Średnia dla danych rzeczywistych wynosi 1304, a odchylenie 1841. Pozwala to obliczyć prawdopodobieństwa, a następnie oczekiwaną liczbę roszczeń według rozkładu normalnego (tab. 7.12).

Tablica 7.12. Aproksymacja wartości odszkodowań wypłaconych przez francuski zakład ubezpieczeń w okresie od stycznia 2003 do czerwca 2004 r. rozkładem normalnym o parametrach $\mu = 1304$, $\sigma = 1841$

Wartość odszkodowania (euro)	Liczba roszczeń	Prawdopodobieństwo według rozkładu normalnego	Oczekiwana liczba roszczeń
0–1000	12 661	0,4344	7844
1000–2000	2 532	0,2129	3844
2000–3000	1 111	0,1742	3146
3000–4000	503	0,1069	1931
4000–5000	309	0,0492	888
5000–6000	260	0,0170	306
6000–7000	139	0,0044	79
7000–8000	120	0,0008	15
8000–9000	64	0,0001	2
9000–10 000	43	0,0000	0
powyżej 10 000	315	0,0000	0
Razem	18 057	1,0000	18 057

Źródło: Opracowanie własne na podstawie pliku danych „fremotorclaim” z [Dutang, Charpentier 2019].

Rozkład normalny lepiej niż jednostajny odwzorowuje spadek liczby roszczeń wraz ze wzrostem wysokości odszkodowania. Jednak różnica pomiędzy liczebnością zaobserwowaną i oczekiwaną jest znaczna, zwłaszcza dla początkowych przedziałów, gdzie liczebności są wysokie.

Aproksymacja rozkładem wykładniczym

Rozkład wykładniczy zdefiniowany jest przez jeden parametr λ , obliczany jako odwrotność wartości oczekiwanej. Dla badanego zestawu danych $\lambda = \frac{1}{1304} = 0,0008$. Pozwala to następnie obliczyć prawdopodobieństwa oraz oczekiwaną liczbę roszczeń według rozkładu wykładniczego (tab. 7.13).

Tablica 7.13. Aproksymacja wartości odszkodowań wypłaconych przez francuski zakład ubezpieczeń w okresie od stycznia 2003 do czerwca 2004 r. rozkładem wykładniczym z parametrem $\lambda = 0,0008$

Wartość odszkodowania (euro)	Liczba roszczeń	Prawdopodobieństwo według rozkładu wykładniczego	Oczekiwana liczba roszczeń
0–1000	12 661	0,5355	9670
1000–2000	2 532	0,2487	4491
2000–3000	1 111	0,1155	2086
3000–4000	503	0,0537	969
4000–5000	309	0,0249	450
5000–6000	260	0,0116	209
6000–7000	139	0,0054	97
7000–8000	120	0,0025	45
8000–9000	64	0,0012	21
9000–10 000	43	0,0005	10
powyżej 10 000	315	0,0005	8
Razem	18 057	1,0000	18 057

Źródło: Opracowanie własne na podstawie pliku danych „fremotorclaim” z [Dutang, Charpentier 2019].

Rozkład wykładniczy lepiej oddaje charakter danych niż rozkład jednostajny. Oczekiwana liczba roszczeń, tak jak zaobserwowana liczba, maleje wraz ze wzrostem wartości odszkodowania.

Aproksymacja rozkładem chi kwadrat

Rozkład chi kwadrat zdefiniowany jest przez jeden parametr v , obliczany jako wartość oczekiwana. Do analizy przyjęto więc $v = 1000$. W pierwszym kroku obliczamy prawdopodobieństwa według rozkładu chi kwadrat, a następnie oczekiwaną liczbę roszczeń (tab. 7.14).

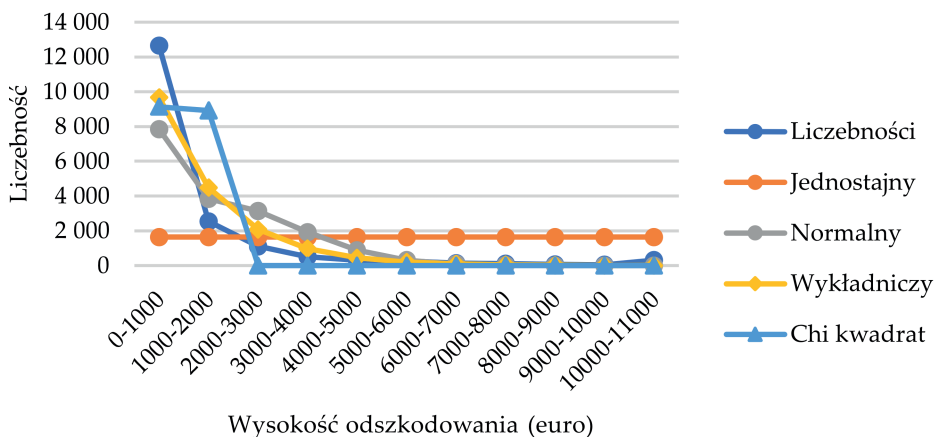
Zgodnie z rozkładem chi kwadrat wszystkie odszkodowania powinny zawierać się w przedziale od 0 do 2000, nie jest to więc model dobrze dobrany do badanych danych.

Wyniki aproksymacji różnymi rozkładami porównano na rysunku 7.10.

Tablica 7.14. Aproksymacja wartości odszkodowań wypłaconych przez francuski zakład ubezpieczeń w okresie od stycznia 2003 do czerwca 2004 r. rozkładem chi kwadrat z parametrem $v = 1000$

Wartość odszkodowania (euro)	Liczba roszczeń	Prawdopodobieństwo według rozkładu chi kwadrat	Oczekiwana liczba roszczeń
0–1000	12 661	0,5059	9136
1000–2000	2 532	0,4941	8921
2000–3000	1 111	0,0000	0
3000–4000	503	0,0000	0
4000–5000	309	0,0000	0
5000–6000	260	0,0000	0
6000–7000	139	0,0000	0
7000–8000	120	0,0000	0
8000–9000	64	0,0000	0
9000–10 000	43	0,0000	0
powyżej 10 000	315	0,0000	0
Razem	18 057	1,0000	18 057

Źródło: Opracowanie własne na podstawie pliku danych „fremotorclaim” z [Dutang, Charpentier 2019].



Rysunek 7.10. Aproksymacja wartości roszczeń za pomocą różnych rozkładów zmiennej losowej ciągłej

Źródło: Opracowanie własne na podstawie pliku danych „fremotorclaim” z [Dutang, Charpentier 2019].

7.4. Rozkłady ucięte

W przypadku niektórych zdarzeń wartość zmiennej losowej jest zaobserwowana dokładnie, o ile znajduje się w pewnym przedziale. W przeciwnym wypadku wiemy jedynie, iż jej wartość znajduje się poza tym przedziałem. W rezultacie badany rozkład zmiennej losowej jest ucięty. Przykładem zmiennej losowej o rozkładzie uciętym jest wysokość odszkodowania wypłaconego z polisy, w której ustalona jest suma ubezpieczenia. Suma ubezpieczenia to maksymalna wysokość odszkodowania, która może być wypłacona z danej polisy. W ubezpieczeniach odpowiedzialności cywilnej maksymalna wysokość odszkodowania, którą wypłaca ubezpieczyciel, nazywana jest sumą gwarancyjną. W takim wypadku odszkodowanie w wysokości przekraczającej sumę ubezpieczenia zostanie „ucięte” do maksymalnej możliwej wysokości.

Przykład 7.11

Wysokość pojedynczej szkody (w euro) zgłoszonej z tytułu polisy ubezpieczenia OC ma rozkład wykładniczy o parametrze λ równym 0,01. Wysokość szkody może według takiego modelu przyjąć dowolną wartość dodatnią. Przyjmując, iż zakład ubezpieczeń pokrywa szkodę w całości, wartość oczekiwana wysokości odszkodowania to $\frac{1}{\lambda} = 100$ euro.

Jak zmieni się wartość oczekiwana wypłaconego odszkodowania, jeżeli zastosujemy sumę gwarancyjną w wysokości 200 euro?

Zastosowanie sumy gwarancyjnej zmieni rozkład wysokości odszkodowania w rozkład ucięty – odszkodowanie o wysokości większej niż 200 euro zostanie „ucięte” do 200 euro. Można to zapisać następująco:

X = wysokość szkody,

Y = wysokość wypłaconego odszkodowania przy sumie gwarancyjnej 200 euro

$$Y = \begin{cases} X & \text{jeżeli } X \leq 200 \\ 200 & \text{jeżeli } X > 200 \end{cases}$$

W przypadku rozkładu wykładniczego można obliczyć wartość oczekiwaną rozkładu uciętego w następujący sposób:

$$E(Y) = E(X) \times P(X \leq 200) = \frac{1}{0,01}(1 - e^{-0,01 \times 200}) = 86,47 \text{ euro}$$

Zastosowanie sumy gwarancyjnej zmniejszyło wartość oczekiwaną wypłaconego odszkodowania z 100 euro do 86,47 euro.

Przykład 7.12

W ubezpieczeniu OC odszkodowanie z jednej polisy może być wypłacane wielokrotnie w okresie ubezpieczenia aż do momentu, gdy suma odszkodowań przekroczy sumę gwarancyjną. Wartość szkód w części, która przekroczy sumę gwarancyjną, nie zostanie pokryta przez zakład ubezpieczeń.

Możemy to zapisać w następujący sposób:

X_i – wysokość i -tej szkody,

$\sum_{k=1}^i X_k$ – suma szkód z jednej polisy,

Y_i – kwota wypłacona przez zakład ubezpieczeń z tytułu i -tej szkody,

M = suma gwarancyjna.

Zakład ubezpieczeń zapłaci:

$$Y_i = \begin{cases} X_i & \text{jeżeli } \sum_{k=1}^i X_k \leq M \\ M - \sum_{k=1}^{i-1} X_k & \text{jeżeli } \sum_{k=1}^{i-1} X_k \leq M < \sum_{k=1}^i X_k \\ 0 & \text{jeżeli } M < \sum_{k=1}^{i-1} X_k \end{cases}$$

Mamy tu również do czynienia z rozkładem uciętym. Wysokość indywidualnej szkody można modelować za pomocą zmiennej losowej, która przyjmuje dowolną wartość dodatnią. Natomiast suma wypłaconych odszkodowań może przyjąć wartości z przedziału od 0 do M , gdzie M to suma ubezpieczenia. Odszkodowania wypłacone są w pełnej wysokości, jeżeli ich suma jest niższa niż M . Jeżeli suma odszkodowań przekracza M , wypłacona kwota jest obniżona („ucięta”), tak aby suma nie przekraczała M . Kolejne odszkodowania nie zostaną wypłacone.

Przykład 7.13

Suma ubezpieczenia w ubezpieczeniu OC posiadaczy pojazdów mechanicznych została ustalona jako 1000 euro. Tablica 7.15 przedstawia przykładowe dane dotyczące wartości zgłoszonych szkód oraz kwot wypłaconych przez zakład ubezpieczeń z trzech polis.

Tablica 7.15. Wartość kolejno zgłoszonych szkód (euro) oraz kwota wypłacona przez zakład ubezpieczeń (euro) z polis A, B, C przy ustalonej sumie ubezpieczenia na poziomie 1000 euro

Polisa A		Polisa B		Polisa C	
Wartość szkody	Kwota wypłacona	Wartość szkody	Kwota wypłacona	Wartość szkody	Kwota wypłacona
400	400	400	400	200	200
600	600	400	400	150	150
300	0	400	200	350	350

Źródło: Opracowanie własne.

Z tytułu polisy A zgłoszono dwie szkody w wysokości 400 i 600 euro. Ich suma wyczerpała już sumę gwarancyjną, a przez to trzecia szkoda w wysokości 300 euro nie została pokryta.

Z tytułu polisy B zgłoszono dwie szkody w wysokości 400 euro, łącznie 800 euro. Z tytułu trzeciej szkody w wysokości 400 euro zostało wypłacone 200 euro.

Z tytułu polisy C zgłoszono trzy szkody o łącznej wysokości 700 euro, co nie wyczerpało sumy ubezpieczenia i szkody zostały pokryte w całości.

Po przeczytaniu rozdziału Czytelnik powinien:

- znać najważniejsze własności wybranych rozkładów zmiennej losowej skokowej i ciągłej,
- umieć obliczyć prawdopodobieństwa zdarzeń ubezpieczeniowych, korzystając z wybranych rozkładów zmiennej losowej,
- umieć obliczyć parametry dla wybranych rozkładów zmiennej losowej,
- umieć aproksymować zjawiska ubezpieczeniowe za pomocą rozkładów zmiennej losowej.

Pytania sprawdzające

1. Jaka jest maksymalna wartość zmiennej losowej o rozkładzie dwumianowym? W rozkładzie Poissona?
2. Które z rozkładów zmiennej losowej ciągłej są symetryczne?
3. Jak przeprowadzić aproksymację liczby zgłoszonych szkód rozkładem Poissona?

Część II

Metody finansowe w ubezpieczeniach

Rozdział 8

Oprocentowanie kapitału

Ewa Majerowska

Hasła: *odsetki, oprocentowanie proste, oprocentowanie składane, stopy procentowe*

8.1. Odsetki od depozytu

Dokonując transakcji finansowych, zazwyczaj posługujemy się pieniądzem. Warto jednak pamiętać, że wartość pieniądza zmienia się w czasie. Siła nabywcza pieniądza, czyli jego realna wartość, wyznacza ilość dóbr i usług, jakie można nabyć za określoną ilość pieniędzy. Jeżeli na danym rynku występuje wzrost cen, czyli zjawisko inflacji, wówczas pieniądź traci swą wartość w czasie. Oznacza to, że za tę samą kwotę pieniędzy jesteśmy w stanie nabyć w okresach przyszłych mniej niż w okresie początkowym.

Zagadnienia związane z wartością pieniądza w czasie pojawiają się także w ubezpieczeniach. Na przykład decydując się na wykupienie ubezpieczenia, klient musi podjąć decyzję, czy zapłacić składkę ubezpieczeniową jednorazowo, na początku okresu, czy też w ratach. Powinien więc przeanalizować warunki proponowane przez dany zakład ubezpieczeń. Każda taka sytuacja wymaga podstawowej wiedzy z tego zakresu, a także umiejętności wyznaczania przyszłej i bieżącej wartości kapitału.

Podstawowym elementem związanym z użyczaniem kapitału są odsetki. Stanowią one koszt za użyczenie kapitału.

Niech K_0 oznacza kapitał początkowy (wyjściowy) w okresie początkowym t_0 .

Definicja 8.1

Odsetki (O) naliczone od kapitału początkowego K_0 jednostek pieniężnych (j.p.) za dany okres stanowi kwota:

$$O = rK_0 \tag{8.1}$$

gdzie r oznacza jednostkową okresową stopę procentową (wyrażoną w ułamku jako część całości).

Przykład 8.1

Jeżeli wpłacimy do banku kwotę wynoszącą 5000 zł na rok, przy rocznej stopie procentowej wynoszącej 1,1%, to po upływie roku otrzymamy odsetki wysokości:

$$O = r K_0 = 0,011 \cdot 5000 = 55 \text{ zł}$$

W praktyce bankowej przyjmuje się, że rok ma 360 dni. Jeżeli depozyt trwa krócej niż rok, wyznacza się ilość pełnych miesięcy i pozostałą część dni. W takim przypadku przyjmuje się, że każdy miesiąc trwa 30 dni. Wyznaczając wysokość odsetek, oblicza się dzienną stopę procentową, dzieląc roczną stopę procentową przez 360.

Przykład 8.2

Wpłacamy do banku 6000 zł, zakładając, że roczna stopa procentowa wynosi 2,6%. Wyznaczamy wysokość odsetek po upływie danego okresu:

- od 16 maja do 29 lipca danego roku
Wówczas liczba dni depozytowych wynosi $2 \cdot 30 + 13 = 73$ dni (dwa pełne miesiące od 16 maja do 16 lipca i 13 dni od 16 lipca do 29 lipca). Odsetki wyniosły wówczas:

$$O = r K_0 = \frac{0,026}{360} \cdot 73 \cdot 6000 = 31,63 \text{ zł}$$

- od 16 maja do 11 września
W takim przypadku liczba dni depozytowych wynosi $3 \cdot 30 + 14 + 11 = 115$ dni (trzy pełne miesiące od 16 maja do 16 sierpnia, 14 dni od 16 sierpnia do końca sierpnia i 11 dni miesiąca września). Wówczas odsetki wyniosły:

$$O = r K_0 = \frac{0,026}{360} \cdot 115 \cdot 6000 = 49,83 \text{ zł}$$

8.2. Zasada oprocentowania prostego

Oprocentowanie polega na okresowym dodawaniu odsetek z posiadanego kapitału do posiadanego już kapitału. Wyróżnia się dwa rodzaje oprocentowania: oprocentowanie proste i oprocentowanie składane (złożone).

Definicja 8.2

Oprocentowanie proste charakteryzuje się tym, że odsetki uzyskiwane w kolejnych okresach nie podlegają oprocentowaniu w okresach kolejnych. Są one tylko dodawane do kapitału początkowego.

Zakładając, że w okresie początkowym kapitał wynosił K_0 , to:

po upływie pierwszego okresu kapitał wynosił: $K_0 + rK_0$

po upływie dwóch okresów: $K_0 + 2rK_0$

...

po upływie n okresów: $K_0 + nrK_0$

Zatem przyszłą wartość kapitału przy oprocentowaniu prostym wyznacza się według następującego wzoru:

$$K_n^p = K_0(1 + nr) \quad (8.2)$$

gdzie K_0 oznacza kapitał początkowy, n liczbę okresów i r okresową stopę procentową (wyrażoną w ułamku).

Przykład 8.3

Lokując do banku 20 000 zł na dwa lata, przy rocznej stopie procentowej wynoszącej 1,5% i rocznym oprocentowaniu prostym, uzyskamy kwotę:

$$K_2^p = K_0(1 + nr) = 20\,000(1 + 2 \cdot 0,015) = 20\,600 \text{ zł}$$

W przypadku oprocentowania prostego nie ma znaczenia, kiedy naliczane są odsetki, na koniec okresu czy śródokresów (na przykład co pół roku, co kwartał, co miesiąc czy częściej). W każdym przypadku kapitał końcowy będzie taki sam.

Przykład 8.4

Załóżmy, że lokujemy kwotę 14 000 zł na trzy lata do banku oferującego oprocentowanie proste przy rocznej stopie procentowej wynoszącej 1,6%. Kapitał końcowy, przy różnych okresach naliczania odsetek, wynosi:

- odsetki naliczane na koniec każdego roku:

$$K_3^p = K_0(1 + nr) = 14\,000(1 + 3 \cdot 0,016) = 14\,672 \text{ zł}$$

- odsetki naliczane na koniec każdego półrocza:

$$K_{3,2}^p = K_0(1 + n \cdot i \cdot \frac{t}{i}) = 14\,000 \left(1 + 3 \cdot 2 \cdot \frac{0,016}{2}\right) = 14\,672 \text{ zł}$$

- odsetki naliczane na koniec każdego kwartału:

$$K_{3,4}^p = K_0(1 + n \cdot i \cdot \frac{t}{i}) = 14\,000 \left(1 + 3 \cdot 4 \cdot \frac{0,016}{4}\right) = 14\,672 \text{ zł}$$

- odsetki naliczane na koniec każdego miesiąca:

$$K_{3,12}^p = K_0(1 + n \cdot i \cdot \frac{t}{i}) = 14\,000 \left(1 + 3 \cdot 12 \cdot \frac{0,016}{12}\right) = 14\,672 \text{ zł}$$

- odsetki naliczane na koniec każdego tygodnia:

$$K_{3,52}^p = K_0(1 + n \cdot i \cdot \frac{t}{i}) = 14\,000 \left(1 + 3 \cdot 52 \cdot \frac{0,016}{52}\right) = 14\,672 \text{ zł}$$

- odsetki naliczane na koniec każdego dnia:

$$K_{3,360}^p = K_0(1 + n \cdot i \cdot \frac{t}{i}) = 14\,000 \left(1 + 3 \cdot 360 \cdot \frac{0,016}{360}\right) = 14\,672 \text{ zł}$$

gdzie i oznacza liczbę śródokresów w danym okresie.

Jak pokazaliśmy powyżej, wartość końcowa kapitału jest wyższa od wartości początkowej (dla $K_0 > 0$). Stąd też z tytułu wcześniejszej spłaty zobowiązania przysługuje nam dyskonto (oznaczone przez D), czyli obniżka wynikająca z tytułu wcześniejszej spłaty. Stanowi je różnica pomiędzy przyszłą a początkową wartością kapitału, czyli:

$$D = K_n - K_0 \quad (8.3)$$

Element $\frac{1}{(1+nr)}$ stanowi tak zwany czynnik dyskontujący. Dyskontowa stopa procentowa (d) różni się od stopy oprocentowania depozytów. Stąd wartość dyskonta przy oprocentowaniu prostym można wyrazić wzorem:

$$D^p = K_n^p \left(1 - \frac{1}{1+nd}\right) \quad (8.4)$$

Przykład 8.5

Zakład ubezpieczeń proponuje nam zapłatę składki ubezpieczeniowej wynoszącej 2500 zł w momencie podpisania umowy lub 2520 zł za miesiąc. Która z możliwości będzie dla nas korzystniejsza, jeżeli mamy możliwość dokonania

lokaty miesięcznej w banku oferującym oprocentowanie proste przy rocznej stopie procentowej wynoszącej 1,8%?

Obliczmy wartość lokaty po upływie miesiąca:

$$K_1^p = 2500 \left(1 + 1 \cdot \frac{0,018}{12} \right) = 2503,75 \text{ zł}$$

Wartość wpłaty (2520 zł) przekracza wartość lokaty, stąd korzystniejsza z naszego punktu widzenia byłaby natychmiastowa opłata składki.

Możemy także porównać obie możliwości płatności co do wartości bieżącej. W przypadku płatności natychmiastowej wynosi ona 2500 zł. W drugim przypadku będzie to zdyskontowana płatność przyszła, czyli:

$$K_0 = \frac{K_n^p}{(1 + nr)}$$

$$K_0 = \frac{2520}{\left(1 + 1 \cdot \frac{0,018}{12} \right)} = 2516,23 \text{ zł}$$

Zatem druga możliwość jest dla nas mniej korzystna.

Przykład 8.6

Za kwartał mamy otrzymać od zakładu ubezpieczeń kwotę wynoszącą 10 000 zł. Zakładając, że stopa dyskontowa wynosi 0,8% w skali roku, wyznaczmy, jaka jest wartość bieżąca tej kwoty i w związku z tym, ile wynosi dyskonto. Zakłada się oprocentowanie proste.

Wartość dyskonta wyznaczmy z powyższego wzoru:

$$D^p = K_n^p \left(1 - \frac{1}{1 + nd} \right) = 10\,000 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{0,008}{4}} \right) = 19,96 \text{ zł}$$

Wynosi ono 19,96 zł, czyli wartość bieżąca przyszłej płatności to 9980,04 zł.

W przypadku zmiennej stopy procentowej modyfikuje się wzór służący do wyznaczenia przyszłej wartości kapitału, uwzględniając poszczególne wartości stóp zwrotu oraz okresy, w których ona występuje.

Przykład 8.7

Wyznaczymy przyszłą wartość czteroletniego depozytu w wysokości 10 000 zł, złożonego w banku, który oferuje oprocentowanie proste. Przez pierwszy rok obowiązywało oprocentowanie 1,8%, w kolejnych dwóch 1,4% i w ostatnim roku 1,1%.

$$K_n^p = K_0(1 + n_1 r_1 + n_2 r_2 + n_3 r_3)$$

$$K_4^p = 10\,000(1 + 1 \cdot 0,018 + 2 \cdot 0,014 + 1 \cdot 0,011) = 10\,570 \text{ zł}$$

8.3. Zasada oprocentowania składanego

Do obliczenia przyszłej wartości kapitału zazwyczaj banki stosują oprocentowanie składane (złożone), czyli tak zwaną kapitalizację okresową.

Definicja 8.3

Oprocentowanie składane polega na tym, że naliczone odsetki są dodawane do kapitału i wraz z nim są podstawą do obliczenia odsetek w okresie następnym⁷⁸.

Zakładając, że w okresie początkowym kapitał wynosił K_0 , to:

po upływie pierwszego okresu kapitał wynosił: $K_0 + rK_0$

o upływie dwóch okresów: $(K_0 + rK_0) + r(K_0 + rK_0)$

...

po upływie n okresów: $K_0(1 + r)^n$

Stąd otrzymuje się wzór na przyszłą wartość kapitału przy oprocentowaniu składanym:

$$K_n^s = K_0(1 + r)^n \quad (8.5)$$

Przykład 8.8

Wartość lokaty wynoszącej 30 000 zł po upływie trzech lat, w przypadku kapitalizacji rocznej, przy rocznej stopie procentowej wynoszącej 1,0%, będzie wynosiła:

$$K_3^s = K_0(1 + r)^n = 30\,000(1 + 0,01)^3 = 30\,909,03 \text{ zł}$$

⁷⁸ Szerzej na ten temat np. w: [Klimkowska, Podgórska 2019].

W przypadku gdy odsetki naliczane są częściej niż co roku, czyli kiedy następuje śródkresowa kapitalizacja odsetek, wzór na przyszłą wartość kapitału przyjmuje postać:

$$K_{ni}^s = K_0 \left(1 + \frac{r}{i}\right)^{ni} \quad (8.6)$$

gdzie i oznacza liczbę śródkresów w roku. Tak jak przy oprocentowaniu prostym, tak również w przypadku kapitalizacji półrocznej $i=2$, w przypadku kwartalnej 4, miesięcznej 12, tygodniowej 52 i dziennej 360.

Przykład 8.9

Obliczmy wartość lokaty wynoszącej 20 000 zł, po upływie pięciu lat, przy rocznej stopie procentowej wynoszącej 1,2% i różnych okresach kapitalizacji.

- Kapitalizacja roczna

$$K_5^s = K_0 (1 + r)^n = 20\,000 (1 + 0,012)^5 = 21\,229,15 \text{ zł}$$

- Kapitalizacja półroczna

$$K_{5-2}^s = K_0 \left(1 + \frac{r}{i}\right)^{ni} = 20\,000 \left(1 + \frac{0,012}{2}\right)^{5 \cdot 2} = 21\,232,92 \text{ zł}$$

- Kapitalizacja kwartalna

$$K_{5-4}^s = K_0 \left(1 + \frac{r}{i}\right)^{ni} = 20\,000 \left(1 + \frac{0,012}{4}\right)^{5 \cdot 4} = 21\,234,82 \text{ zł}$$

- Kapitalizacja miesięczna

$$K_{5-12}^s = K_0 \left(1 + \frac{r}{i}\right)^{ni} = 20\,000 \left(1 + \frac{0,012}{12}\right)^{5 \cdot 12} = 21\,236,09 \text{ zł}$$

- Kapitalizacja tygodniowa

$$K_{5-52}^s = K_0 \left(1 + \frac{r}{i}\right)^{ni} = 20\,000 \left(1 + \frac{0,012}{52}\right)^{5 \cdot 52} = 21\,236,58 \text{ zł}$$

- Kapitalizacja dzienna

$$K_{5-360}^s = K_0 \left(1 + \frac{r}{i}\right)^{ni} = 20\,000 \left(1 + \frac{0,012}{360}\right)^{5 \cdot 360} = 21\,236,71 \text{ zł}$$

Można zauważyć, że im częściej naliczane są odsetki, tym wyższa przyszła wartość kapitału.

Przykład 8.10

Zakład ubezpieczeń zaproponował klientowi pokrycie kosztów naprawy samochodu w wysokości 8000 zł natychmiast lub 8100 zł za cztery miesiące. Wiadomo, że naprawa potrwa dłuższy czas. Obliczmy, na którą możliwość powinien zdecydować się klient, pod względem przyszłej wartości kapitału, jeśli ma on możliwość dokonania lokaty trzymiesięcznej w banku oferującym miesięczną kapitalizację odsetek przy rocznej stopie procentowej wynoszącej 2,4%.

Wartość kapitału bieżącego, wynoszącego 8000 zł, po czterech miesiącach będzie wynosiła:

$$K_4^s = 8000 \left(1 + \frac{0,024}{12} \right)^4 = 8064,19 \text{ zł}$$

Będzie to więc kwota niższa niż 8100 zł. Klient powinien więc zgodzić się na zapłatę wyższej kwoty za cztery miesiące.

Analogicznie jak w przypadku oprocentowania prostego wyznaczyć można dyskonto, czyli różnicę pomiędzy przyszłą a bieżącą wartością kapitału. W przypadku oprocentowania składanego będzie się ono wyrażało wzorem:

$$D^s = K_n^s \left[1 - \frac{1}{(1+d)^n} \right] \quad (8.7)$$

gdzie d oznacza jednostkową stopę dyskontową.

Przykład 8.11

Klient ma trzy możliwości zapłaty za składkę ubezpieczeniową AC dotyczącą posiadanego samochodu. Może dokonać płatności jednorazowej, w dniu podpisania umowy, w wysokości 2800 zł, lub w dwóch ratach: 1400 zł w momencie podpisania umowy i 1450 zł po upływie pół roku, lub w czterech jednakowych ratach co kwartał po 720 zł, przy czym pierwsza płatność musi być dokonana w chwili podpisania umowy.

Jednocześnie istnieje możliwość lokaty kapitału w banku oferującym miesięczną kapitalizację odsetek według rocznej stopy procentowej wynoszącej 2%. Określimy, która z możliwości jest korzystniejsza z punktu widzenia klienta zakładu ubezpieczeń.

Możemy porównać wszystkie trzy warianty płatności pod względem przyszłej lub bieżącej wartości kapitału. Oceniając wartości bieżące (zdyskontowane), otrzymamy:

Wariant 1: $K_0 = 2800 \text{ zł}$,

$$\text{Wariant 2: } K_0 = 1400 + \frac{1450}{\left(1 + \frac{0,02}{12}\right)^6} = 2835,58 \text{ zł}$$

$$\text{Wariant 3: } K_0 = 720 + \frac{720}{\left(1 + \frac{0,02}{12}\right)^3} + \frac{720}{\left(1 + \frac{0,02}{12}\right)^6} + \frac{720}{\left(1 + \frac{0,02}{12}\right)^9} \text{ zł}$$

$$K_0 = 720 + 716,41 + 712,84 + 709,29 = 2858,54 \text{ zł}$$

Z punktu widzenia klienta najkorzystniejszy będzie wariant pierwszy, czyli jednorazowa opłata składki.

Często zdarza się, że depozyt trwa krócej niż pełna liczba okresów (na przykład dwa i pół roku przy kapitalizacji rocznej, trzy miesiące i dwa dni przy kapitalizacji miesięcznej). Mamy wówczas do czynienia z kapitalizacją okresowo-przedziałową.

Definicja 8.4

Kapitalizacją okresowo-przedziałową nazywa się taką kapitalizację okresową, która dotyczy wielokrotności pełnych okresów depozytowych (n) oraz części okresu (a), gdzie $0 < a < 1$.

Przyszłą wartość kapitału przy kapitalizacji okresowo-przedziałowej wyznacza się, traktując pełne okresy tak jak przy oprocentowaniu składanym, natomiast pozostałą część podobnie do oprocentowania prostego. Określa ją wzór:

$$K_{n+a}^s = K_0 (1+r)^n (1+a \cdot r) \quad (8.8)$$

gdzie n to liczba okresów depozytowych, a to część okresu, przy czym $0 < a < 1$.

Przykład 8.12

Klient ulokował w banku, oferującym roczną kapitalizację odsetek, przy rocznej stopie procentowej 1,1%, kwotę wynoszącą 25 000 zł. Wyznamy wartość tej lokaty po upływie dwóch lat i pięciu miesięcy:

$$K_{2+\frac{5}{12}}^s = K_0 (1+r)^n (1+a \cdot r) = 25\,000 (1+0,011)^2 \left(1 + \frac{5}{12} \cdot 0,011\right) = 25\,670,14 \text{ zł}$$

W przypadku gdyby zdecydował się on zlikwidować lokatę po upływie czterech miesięcy (czyli jednej trzeciej roku), otrzymałby kwotę:

$$K_{0+\frac{1}{3}}^s = K_0 (1+r)^n (1+a \cdot r) = 25\,000 (1+0,011)^0 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot 0,011\right) = 25\,091,67 \text{ zł}$$

Wykorzystując wzory na przyszłą wartość kapitału przy oprocentowaniu prostym i składanym, można dokonywać porównań ofert banków, określać, który z ich oferuje warunki korzystniejsze dla klienta.

Przykład 8.13

Bank A oferuje oprocentowanie proste przy rocznej stopie procentowej wynoszącej 1,3%. Bank B nalicza odsetki raz do roku według stopy rocznej 1,1%, natomiast bank C stosuje kapitalizację miesięczną przy stopie procentowej 0,9% w skali roku. Który z banków oferuje najlepsze warunki, jeśli wiadomo, że depozyt ma trwać 4 lata?

$$\text{Bank A: } K_4^p = K_0(1 + 4 \cdot 0,013) = 1,052 K_0$$

$$\text{Bank B: } K_4^s = K_0(1 + 0,011)^4 = 1,045 K_0$$

$$\text{Bank C: } K_{48}^s = K_0 \left(1 + \frac{0,009}{12}\right)^{48} = 1,037 K_0$$

Najlepsze warunki oferuje bank A.

Na podstawie powyższych wzorów można także określić pożądane okresy depozytowe, poziomy stóp zwrotu lub też kapitały początkowe przy podanych oczekiwanych poziomach przyszłych zysków.

Przykład 8.14

Rozwijający się zakład ubezpieczeń zamierza w ciągu pięciu lat potroić stan zatrudnienia. Określimy, jakie powinno być średnioroczne tempo wzrostu zatrudnienia, jeśli w chwili obecnej zakład zatrudnia 4840 osób.

Kapitał końcowy (dotyczący zatrudnienia) ma stanowić trzykrotność kapitału początkowego, czyli $K_5^s = 3 K_0$. Korzystając ze wzoru na przyszłą wartość kapitału przy oprocentowaniu składanym, otrzymamy:

$$K_n^s = K_0(1 + r)^n$$

$$3 K_0 = K_0(1 + r)^5$$

Wiadomo, że kapitał początkowy (stan zatrudnienia) jest większy od zera, zatem dzielimy obustronnie przez K_0 :

$$3 = (1 + r)^5$$

$$\sqrt[5]{3} = 1 + r$$

$$1,2457 = 1 + r$$

$$r = 0,2457$$

Zakład powinien więc średnio co roku zwiększać zatrudnienie o 24,57%.

Przykład 8.15

Klient wycenił szkodę na 11 200 zł. Zgodnie z zawartym ubezpieczeniem otrzymał 10 000 zł. Otrzymałą kwotę mógłby wpłacić do banku oferującego roczną kapitalizację odsetek przy rocznej stopie procentowej wynoszącej 2,4%. Przez ile lat musiałby trwać depozyt, aby pokryć brakujące środki finansowe?

Wykorzystując wzór na przyszłą wartość kapitału przy oprocentowaniu składanym, mamy:

$$K_n^s = K_0 (1 + r)^n$$

$$11\,200 = 10\,000 (1 + 0,024)^n$$

Dzieląc obustronnie przez 10 000, otrzymujemy:

$$1,12 = 1,024^n$$

Logarytmując obustronnie logarytmem naturalnym, mamy:

$$\ln 1,12 = \ln 1,024^n$$

Stąd:

$$\ln 1,12 = n \ln 1,024$$

co daje:

$$n = \frac{\ln 1,12}{\ln 1,024}$$

czyli:

$$n = 4,78$$

Zatem depozyt musiałby trwać przez 4 lata i 0,78 roku, czyli nieco ponad 4 lata i 3 kwartały.

Jeśli mielibyśmy do czynienia z oprocentowaniem prostym, wówczas rozwiązanie wyglądałoby następująco:

$$K_n^p = K_0(1 + nr)$$

$$11\,200 = 10\,000(1 + n \cdot 0,024)$$

$$1,12 = 1 + n \cdot 0,024$$

$$0,12 = n \cdot 0,024$$

co daje:

$$n = 5$$

W takim przypadku depozyt powinien trwać 5 lat.

W przypadku zmiennej stopy procentowej przekształca się wzór na przyszłą wartość kapitału, uwzględniając tę zmienność.

Przykład 8.16

Wyznamy przyszły stan lokaty czteroletniej o wartości początkowej wynoszącej 7000 zł. Przez pierwsze dwa lata obowiązywała roczna stopa procentowa wynosząca 2,2%, przez kolejny rok i cztery miesiące 2,0% i do końca okresu trwania lokaty 1,7%.

Jeżeli założy się roczną kapitalizację odsetek, to otrzymamy:

$$K_{2+1+(\frac{4}{12}+\frac{8}{12})}^s = 7000 (1 + 0,022)^2 (1 + 0,02)^1 \left(1 + \frac{4}{12} \cdot 0,02 + \frac{8}{12} \cdot 0,017\right) \text{ zł}$$

$$K_{2+1+(\frac{4}{12}+\frac{8}{12})}^s = 7000 \cdot 1,08455 = 7591,85 \text{ zł}$$

W przypadku kapitalizacji miesięcznej:

$$K_{24+16+8}^s = 7000 \left(1 + \frac{0,022}{12}\right)^{24} \left(1 + \frac{0,020}{12}\right)^{16} \left(1 + \frac{0,017}{12}\right)^8 \text{ zł}$$

$$K_{24+16+8}^s = 7000 \cdot 1,085379 = 7597,65 \text{ zł}$$

Więcej przykładów można znaleźć w licznej literaturze przedmiotu⁷⁹.

8.4. Stopy procentowe

W dotychczasowych rozważaniach przedstawiona została nominalna jednostkowa stopa procentowa. Z przyszłą wartością kapitału oraz oprocentowaniem składanym nierozłącznie wiążą się stopy procentowe. Do najważniejszych

⁷⁹ Przykładowo w takich publikacjach, jak: [Adamczak, Majerowska 2003; Bazańska, Nykowska 2004; Małłoka, Wojcieszyn 2000; Sobczyk 2006].

z nich należą przeciętna stopa procentowa, równoważna stopa procentowa oraz efektywna stopa procentowa.

Definicja 8.5

Jednostkowa **przeciętna stopa procentowa** to taka stopa procentowa, która przy oprocentowaniu składanym zapewnia taki sam kapitał końcowy co kapitalizacja odsetek ze zmiennymi stopami okresowymi przy tym samym kapitale początkowym i tym samym czasie trwania depozytu.

Punktem wyjścia do wyprowadzenia wzoru na przeciętną stopę procentową jest wzór służący do wyznaczenia przyszłej wartości kapitału przy oprocentowaniu składanym ze zmiennymi stopami procentowymi:

$$K_n^s = K_0(1 + r_1)(1 + r_2) \cdot \dots \cdot (1 + r_n) \quad (8.9)$$

Ten sam kapitał końcowy zapewniać ma jedna, przeciętna stopa procentowa ($\bar{r}$):

$$K_0(1 + \bar{r})^n = K_0(1 + r_1)(1 + r_2) \cdot \dots \cdot (1 + r_n)$$

Stąd:

$$(1 + \bar{r})^n = (1 + r_1)(1 + r_2) \cdot \dots \cdot (1 + r_n)$$

co daje:

$$1 + \bar{r} = \sqrt[n]{(1 + r_1)(1 + r_2) \cdot \dots \cdot (1 + r_n)}$$

$$\bar{r} = \sqrt[n]{(1 + r_1)(1 + r_2) \cdot \dots \cdot (1 + r_n)} - 1$$

Czyli przeciętną stopę procentową wyznaczymy, korzystając ze wzoru:

$$\bar{r} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n (1 + r_j)} - 1 \quad (8.10)$$

Przykład 8.17

Możliwe jest założenie lokaty pięcioletniej, przy rocznej kapitalizacji odsetek. Przez pierwszy rok obowiązywało oprocentowanie 2,2% w skali roku, przez kolejne dwa lata 2,0% i przez kolejne dwa 1,8%.

Jaka musiałaby obowiązywać przeciętna stopa procentowa przez cały okres trwania lokaty, aby uzyskać taki sam kapitał końcowy?

$$\bar{r} = \sqrt[5]{(1+0,022)(1+0,02)(1+0,02)(1+0,018)(1+0,018)} - 1$$

czyli:

$$\bar{r} = \sqrt[5]{(1+0,022)(1+0,02)^2(1+0,018)^2} - 1$$

$$\bar{r} = \sqrt[5]{1,101912} - 1$$

$$\bar{r} = 1,0196 - 1$$

$$\bar{r} = 0,0196$$

co daje przeciętną roczną stopę procentową na poziomie 1,96%. Zatem jeśli bank co roku, przez pięć lat, naliczałby odsetki, stosując stopę 1,96%, to uzyskalibyśmy ten sam kapitał końcowy co przy zastosowaniu podanych powyżej zmiennych stóp procentowych.

W celu porównania lokat banków o różnych okresach kapitalizacji (na przykład rocznej, kwartalnej, miesięcznej czy dziennej) wyznacza się równoważną lub efektywną stopę procentową.

Definicja 8.6

Równoważna stopa procentowa to taka stopa procentowa, przy której kapitalizacja śródkresowa przynosi taki sam kapitał końcowy co kapitalizacja okresowa przy tym samym kapitale początkowym i tym samym czasie trwania depozytu.

Stopę równoważną (r_r) wyznacza się ze wzoru:

$$r_r = i(\sqrt[i]{1+r} - 1) \quad (8.11)$$

gdzie i to liczba dzieląca okres na śródkresy, r nominalna okresowa stopa procentowa.

Przykład 8.18

Pewien bank oferuje depozyty 3-miesięczne o oprocentowaniu 1,7% w skali roku, 6-miesięczne o oprocentowaniu 1,8% w skali roku i roczne o oprocentowaniu 1,9% w skali roku. Postanowiono ulokować kapitał w tym banku na rok. Która z ofert okazuje się najkorzystniejsza dla klienta?

Wyznaczamy stopy równoważne dla każdego z depozytów.

depozyt 3-miesięczny: $r_r = i(\sqrt[3]{1+r} - 1) = 4(\sqrt[4]{1+0,019} - 1) = 0,0188$

depozyt 6-miesięczny: $r_r = 2(\sqrt[2]{1+0,019} - 1) = 0,0189$

depozyt 12-miesięczny: $r_r = 0,019$

Wyniki te oznaczają, że jeżeli bank naliczałby odsetki co trzy miesiące według stopy procentowej wynoszącej 1,88%, to po upływie roku otrzymalibyśmy taki sam kapitał końcowy jak w przypadku, gdyby dokonał tego tylko raz na koniec roku według stopy 1,9%.

Analogicznie, jeżeli bank naliczałby odsetki co pół roku według stopy procentowej wynoszącej 1,89%, to po upływie roku otrzymalibyśmy taki sam kapitał końcowy jak w przypadku, gdyby dokonał tego tylko raz na koniec roku według stopy 1,9%.

Oznacza to, że porównując oferty depozytowe 3-miesięczną i 6-miesięczną, zauważamy, że proponowane stopy procentowe są niższe niż stopy równoważne, zatem najkorzystniejszy jest wybór depozytu 12-miesięcznego.

Przekształcając równanie pozwalające na wyznaczenie stopy równoważnej, wprowadzić można nominalną stopę okresową (r):

$$r_r = i(\sqrt[3]{1+r} - 1)$$

$$\frac{r_r}{i} = \sqrt[3]{1+r} - 1$$

$$\frac{r_r}{i} + 1 = \sqrt[3]{1+r}$$

$$\left(1 + \frac{r_r}{i}\right)^i = 1 + r$$

Otrzymujemy równanie postaci:

$$r = \left(1 + \frac{r_r}{i}\right)^i - 1$$

Zastępując równoważną stopę procentową stopą nominalną, otrzymuje się wzór służący do wyznaczenia efektywnej stopy procentowej (r_e):

$$r_e = \left(1 + \frac{r_r}{i}\right)^i - 1 \quad (8.12)$$

Definicja 8.7

Efektywna okresowa stopa procentowa to taka stopa okresowa, przy której otrzymuje się taki sam kapitał końcowy przy kapitalizacji okresowej co przy kapitalizacji śródokresowej przy danej nominalnej stopie procentowej, przy tym samym kapitale początkowym i tym samym czasie trwania depozytu.

Przykład 8.19

Nominalne stopy procentowe proponowane przez bank dla depozytów wynosiły odpowiednio:

depozyt 3-miesięczny: 2,0%,

depozyt 6-miesięczny: 2,2%,

depozyt 12-miesięczny: 2,4%.

Ocenimy, który z nich należy wybrać, lokując pieniądze na rok w tym banku. W tym celu wyznaczymy roczne efektywne stopy procentowe dla każdego rodzaju depozytu:

$$\text{depozyt 3-miesięczny: } r_e = (1 + \frac{0,02}{4})^4 - 1 = 0,0202,$$

$$\text{depozyt 6-miesięczny: } r_e = \left(1 + \frac{0,022}{2}\right)^2 - 1 = 0,0221,$$

$$\text{depozyt 12-miesięczny: } r_e = 0,024.$$

Jeżeli bank naliczałby odsetki na koniec roku według stopy procentowej wynoszącej 2,02%, to po upływie roku otrzymalibyśmy taki sam kapitał końcowy jak w przypadku, gdy dokonałby tego co trzy miesiące według stopy 2%.

Podobnie, jeżeli bank naliczałby odsetki na koniec roku według stopy procentowej wynoszącej 2,21%, to po upływie roku otrzymalibyśmy taki sam kapitał końcowy jak w przypadku, gdy dokonałby tego co pół roku według stopy 2,2%.

Najkorzystniejsza jest zatem oferta depozytu 12-miesięcznego.

Po przeczytaniu tego rozdziału Czytelnik powinien:

- potrafić obliczyć odsetki od zgromadzonego kapitału,
- umieć rozróżniać oprocentowanie proste od złożonego,
- potrafić obliczyć przyszłą wartość kapitału w zależności od oferowanego rodzaju oprocentowania,
- umieć wyznaczyć wartość należnego dyskonta z tytułu wcześniejszej spłaty zobowiązania,
- porównywać oferty instytucji finansowych w oparciu o różnego rodzaju stopy procentowe.

Pytania sprawdzające

1. Jaka będzie wysokość odsetek od kapitału wysokości 15 000 zł wpłaconego do banku dnia 26 sierpnia, a wypłaconego (a) 30 października (b) 12 grudnia, przyjmując roczną nominalną stopę procentową na poziomie 1,3%?
2. Jaką kwotę otrzymamy, dokonując dwuletniej lokaty w wysokości 10 000 zł, zakładając, że roczna nominalna stopa procentowa wynosi 2%? W banku obowiązuje oprocentowanie (a) proste, (b) składane roczne, (c) składane kwartalne, (d) składane miesięczne.
3. Klient zamierza spłacić swe zobowiązanie w wysokości 5000 zł dwa miesiące przed terminem. Zakładając roczną stopę dyskontową na poziomie 1,2%, jakie przysługuje mu dyskonto z tytułu wcześniejszej spłaty zobowiązania?
4. Pan X ze względu na kłopoty zdrowotne zamierza wykupić polisę, która ma mu zapewnić dochód 1000 zł po roku, 1500 zł po dwóch latach i 2000 zł po trzech latach. Po jakiej cenie zdecyduje się on wykupić tę polisę, jeśli roczna stopa dyskontowa została ustalona na poziomie 1,2% dla pierwszego roku i 1% dla pozostałych lat?
5. Zakład ubezpieczeń proponuje zakup polisy w trzech możliwych wariantach. Pierwszy z nich to zapłata natychmiastowa w wysokości 1200 zł, druga zapłata w dwóch jednakowych ratach po 590 zł za miesiąc i następna po trzech miesiącach. Trzeci wariant to zapłata 600 zł natychmiast i 580 zł za sześć miesięcy. Która oferta jest najkorzystniejsza, jeśli bank oferuje możliwość założenia lokaty miesięcznej przy rocznej stopie procentowej wynoszącej 0,08% w skali roku?
6. Oprocentowanie depozytów bankowych uzależnione jest od długości trwania depozytu i wynosi odpowiednio dla depozytów rocznych 1,8%, półrocznych 1,7% i kwartalnych 1,6%. Ile będą wynosiły równoważne i efektywne stopy procentowe? Który rodzaj depozytu jest najkorzystniejszy dla klienta banku?
7. Przez dwa lata obowiązywała w banku nominalna roczna stopa procentowa na poziomie 3,6%. W kolejnym roku było to 3,3%. W dwóch następnych latach 2,7%, w kolejnym 2,2% i w ostatnim roku 1,8%. Ile będzie wynosiła przeciętna roczna stopa procentowa w analizowanych latach?

Rozdział 9

Inflacja

Anna Zamojska

Hasła: *inflacja, indeksacja, realne i nominalne stopy procentowe*

9.1. Znaczenie inflacji w ubezpieczeniach

Dość powszechnie w ubezpieczeniach spotykamy się z pojęciem indeksacji, która polega na podwyższeniu w każdą rocznicę zawarcia polisy składki i sumy ubezpieczenia. Głównym celem tego działania jest przeliczenie wartości wybranej kategorii ekonomicznej i w przypadku ubezpieczenia ma zapewnić ochronę wartości świadczeń przed skutkami inflacji. Indeksacja ma zastosowanie przede wszystkim w ubezpieczeniach, w których składka jest opłacana regularnie.

Zjawisko występowania inflacji w gospodarce ma bezpośredni wpływ na realną wartość kategorii ekonomicznych i finansowych, takich jak na przykład dobra konsumpcyjne czy usługi finansowe, w tym także wspomniane wyżej ubezpieczenia. W efekcie jej występowania wzrastają ceny i jednocześnie spada siła nabywcza pieniądza. O istocie zjawiska niech świadczy fakt, że Milton Friedman [2018] uważał inflację za formę podatku, który można nałożyć bez ustawy.

Najprostsza i najczęściej spotykana definicja inflacji to:

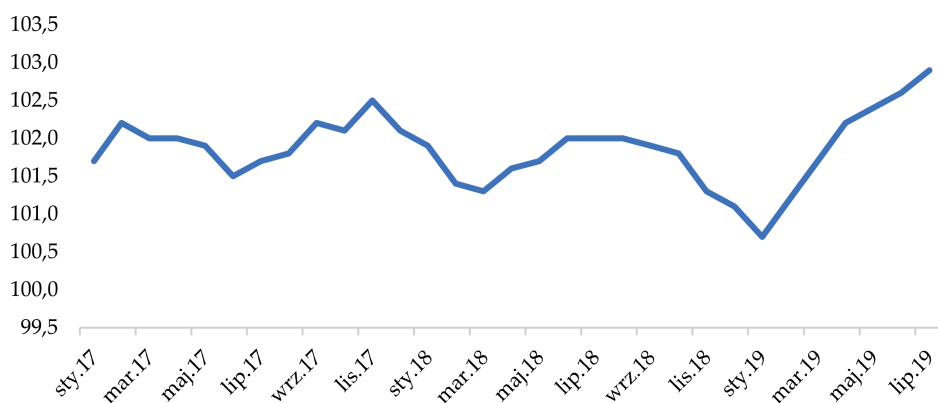
Definicja 9.1.

Inflacja jest to proces wzrostu ogólnego poziomu cen towarów i usług w gospodarce.

Wzrost ten musi mieć stosunkowo stały charakter, utrzymujący się w danym okresie. Przeciwnieństwem zjawiska inflacji jest deflacja, powodująca wzrost wartości pieniądza. Najpopularniejszą miarą wzrostu cen towarów i usług jest wskaźnik inflacji konsumenckiej – CPI (ang. *consumer price index*). Wskaźnik

ten szacowany jest na podstawie zmian ceny określonego koszyka dóbr zaspokajających potrzeby przeciętnego gospodarstwa domowego. Lista towarów jest na bieżąco weryfikowana, aby jak najlepiej dostosować się do aktualnych potrzeb konsumpcyjnych ludności [<https://stat.gov.pl/obszary-tematyczne/ceny-handel/>].

Standardowo składka ubezpieczeniowa podnoszona jest w oparciu o kryteria przyjęte w warunkach umowy, zwykle o wskaźnik wzrostu cen towarów i usług konsumpcyjnych ogłaszany przez Główny Urząd Statystyczny (GUS) dla okresu dwunastu miesięcy kalendarzowych poprzedzających datę złożenia propozycji indeksacji⁸⁰. Na rysunku 9.1 przedstawiono miesięczne wartości indeksu cen towarów i usług konsumpcyjnych CPI w Polsce w okresie od stycznia 2017 do lipca 2019. Zakres wahań wskaźnika pokazuje, że zarówno składka, jak i suma ubezpieczenia narażone są na ryzyko utraty wartości na skutek występowania inflacji.



Rysunek 9.1. Indeks cen towarów i usług konsumpcyjnych, analogiczny okres roku poprzedniego = 100, 01.2017–07.2019.

Źródło: [<https://stat.gov.pl/wskazniki-makroekonomiczne>].

W związku z tym, że inflacja jest procesem ciągłym w pewnym okresie, oznacza to, że jej efekty kumulują się w czasie. Obliczając stopę inflacji za pewien okres, w trakcie którego jej poziom ulegał zmianie, konieczne jest uwzględnienie tego efektu. Warto tu pamiętać, że odpowiada on technice

⁸⁰ Zazwyczaj indeksacja jest proponowana, gdy wzrost wskaźnika przekroczy 5% od czasu ostatniej indeksacji.

oprocentowania składanego (kapitalizacji), przy czym „kapitalizowane” są wzrosty cen.

Jeżeli oznaczymy przez $r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in}$ okresowe jednostkowe stopy inflacji w poszczególnych śródkresach, wówczas:

współczynnik wzrostu dóbr, na skutek inflacji, w tym okresie, wyraża się wzorem:

$$\Delta W = \prod_{j=1}^n (1 + r_{ij}) \quad (9.1)$$

stopa inflacji w całym okresie jest równa:

$$r_i = \prod_{j=1}^n (1 + r_{ij}) - 1 \quad (9.2)$$

przeciętna stopa inflacji w jednym z n okresów jest równa:

$$\bar{r}_i = \left[\prod_{j=1}^n (1 + r_{ij}) \right]^{1/n} - 1 \quad (9.3)$$

9.2. Zależność między inflacją a stopami procentowymi

Indeksacja jest ściśle związana ze sprowadzaniem kategorii nominalnych do kategorii realnych, a to prowadzi nas do wprowadzenia pojęć nominalnej i realnej stopy procentowej, które są istotne z punktu widzenia zmiany wartości pieniądza w czasie, ponieważ różnią się między sobą.

Różnica ta może być wyjaśniona za pomocą hipotezy Irvinga Fishera o zależności pomiędzy poziomem stóp procentowych w gospodarce a poziomem nominalnych stóp procentowych. Hipoteza opublikowana została w opracowaniu *Appreciation and Interest* w 1896 r. Wraz z upływem lat hipoteza ta uzyskała status twierdzenia Fishera (efektu Fishera), zgodnie z którym realna stopa procentowa jest niezależna od środków pieniężnych, w szczególności od nominalnej stopy procentowej i oczekiwanej stopy inflacji. Określenie „nominalne oprocentowanie” odnosi się do rzeczywistej stopy oprocentowania, termin „realna stopa procentowa” odnosi się do kwoty pieniężnej, której siła nabywcza rośnie z upływem czasu. Oznacza to, że realna stopa procentowa jest to nominalna stopa procentowa skorygowana o wpływ inflacji na siłę nabywczą dochodów.

Definicja 9.2

Realna okresowa stopa procentowa jest to okresowa stopa procentowa nieuwzględniająca wpływu inflacji w tym okresie.

Definicja 9.3

Nominalna okresowa stopa procentowa jest to stopa procentowa uwzględniająca wpływ inflacji w tym okresie.

Twierdzenie 9.1

Między jednostkowymi okresowymi stopami procentowymi: nominalną (r), realną (r_r) oraz inflacji (r_i), zachodzi relacja:

$$r = r_r + r_i + r_r \cdot r_i \quad (9.4)$$

Jeśli zatem przyjmiemy, zgodnie z hipotezą Fishera, że realna stopa procentowa jest stała, wówczas nominalna stopa musi się zmieniać, kiedy inflacja wzrasta lub spada. Zatem zgodnie z efektem Fishera korekta nominalnej stopy procentowej występuje w dokładnie takim samym stopniu, jak zmienia się inflacja.

Przykład 9.1

Kwartalna stopa inflacji wynosiła 3%. Wyznaczyć realną stopę procentową w tym okresie, jeżeli nominalna kwartalna stopa procentowa była równa 5%.

Rozwiązanie:

Ze wzoru (9.4) wyznaczamy realną stopę procentową:

$$r_r = \frac{r - r_i}{1 + r_i}$$

Po podstawieniu $r = 0,05$, $r_i = 0,03$ odpowiednio wyznaczamy:

$$r_r = \frac{0,05 - 0,03}{1 + 0,03} = 0,0194$$

Realna stopa procentowana w badanym kwartale była równa 1,94%.

Przykład 9.2

Miesięczna stopa inflacji wynosiła: w styczniu 2,1%, w lutym 1,5%, w marcu 2,3%. Obliczyć łączną stopę inflacji za te trzy miesiące oraz przeciętną miesięczną stopę inflacji.

Rozwiązanie:

Podstawiając do wzoru (9.2), otrzymujemy łączną stopę inflacji za trzy miesiące:

$$r_i = [(1 + 0,021)(1 + 0,015)(1 + 0,023)] - 1 = 0,0602$$

Podstawiając do wzoru (9.3), otrzymujemy przeciętną stopę inflacji:

$$\bar{r}_i = [(1 + 0,021)(1 + 0,015)(1 + 0,023)]^{1/3} - 1 = 0,0197$$

Średnia miesięczna stopa inflacji wyniosła w badanym okresie 1,95%, zaś łączna stopa inflacji za te trzy miesiące była równa 6,02%.

Przykład 9.3

Przeciętne miesięczne wynagrodzenie nominalne brutto w gospodarce narodowej w Polsce w pierwszym kwartale 2018 r. wynosiło 4623 zł [<https://stat.gov.pl/wskazniki-makroekonomiczne>]. Ustalono, że płace w poszczególnych kwartałach będą indeksowane co kwartał wskaźnikiem równym 0,8 stopy inflacji kwartału poprzedniego. Mając dane kwartalne stopy inflacji w skali roku wynoszące dla poszczególnych kwartałów 2018 r.: 2,0%; 1,8%; 1,9% i 2,2%, wyznaczyć:

- a) przeciętne płace w poszczególnych kwartałach,
- b) roczną stopę inflacji,
- c) przeciętną kwartalną stopę inflacji,
- d) realną stopę wzrostu zarobków.

Rozwiązanie:

- a) W drugim kwartale średnie płace mają wzrosnąć o:

$$0,8 \cdot 2,0\% = 1,6\%$$

i powinny wynosić:

$$P_{Q2} = 4623 \left(1 + \frac{0,016}{4} \right) = 4641$$

W trzecim kwartale średnie płace powinny wzrosnąć o:

$$0,8 \cdot 1,8\% = 1,44\%$$

i powinny wynosić:

$$P_{Q3} = 4641 \left(1 + \frac{0,0144}{4} \right) = 4658$$

Analogicznie w czwartym kwartale otrzymujemy:

$$0,8 \cdot 2,2 \% = 1,76\%$$

i stąd średnie płace w czwartym kwartale powinny wynosić

$$P_{Q^4} = 4658 \left(1 + \frac{0,0176}{4} \right) = 4679$$

b) Roczną stopę inflacji wyznaczamy z relacji:

$$(1 + r_i) = \left(1 + \frac{0,02}{4} \right) \left(1 + \frac{0,018}{4} \right) \left(1 + \frac{0,019}{4} \right) \left(1 + \frac{0,022}{4} \right) - 1 \rightarrow r_i = 0,0199$$

Roczna stopa inflacji w 2018 r. była równa 1,99%.

c) Przeciętną kwartalną stopę inflacji wyznaczamy z relacji:

$$\left(1 + \frac{\bar{r}_i}{4} \right)^4 = 1,0199 \rightarrow \bar{r}_i = 0,0198.$$

Przeciętna kwartalna stopa inflacji w 2018 r. była równa 1,98%.

d) Wyznaczamy realną roczną stopę wzrostu zarobków. Wzrost ten jest równy:

$$4679 - 4623 = 56 \rightarrow 1,211\%$$

Realną stopę wzrostu płac otrzymujemy z relacji 9.4:

$$r_r = \frac{0,0121 - 0,0199}{1,0199} = -0,0076$$

Realna stopa płac spadła zatem o 0,76%.

Przykład 9.4

Miesięczne stopy inflacji w poszczególnych miesiącach pierwszego półrocza 2019 r. były odpowiednio równe: 0,7%; 1,2%; 1,7%; 2,2%; 2,4% i 2,6%. Wyznać przeciętną:

- miesięczną stopę inflacji,
- kwartalną stopę inflacji,
- półroczną stopę inflacji.

Rozwiązanie:

Zgodnie z definicją na przeciętną stopę procentową (rozdział 8, definicja 8.5):

- a) przeciętną jednostkową miesięczną stopę inflacji ($\bar{r}_i$) wyznaczamy z relacji:

$$\bar{r}_i = [1,007 \cdot 1,012 \cdot 1,017 \cdot 1,022 \cdot 1,024 \cdot 1,026]^{1/6} - 1 = [1,113]^{1/6} - 1 = 0,018$$

Przeciętna miesięczna stopa inflacji jest równa 1,8%.

Analogicznie wyznaczamy pozostałe stopy:

$$\text{b) } \bar{r}_i = [1,007 \cdot 1,012 \cdot 1,017 \cdot 1,022 \cdot 1,024 \cdot 1,026]^{1/2} - 1 = [1,113]^{1/2} - 1 = 0,0549$$

Przeciętna kwartalna stopa inflacji jest równa 5,49%.

$$\text{c) } \bar{r}_i = [1,007 \cdot 1,012 \cdot 1,017 \cdot 1,022 \cdot 1,024 \cdot 1,026]^1 - 1 = [1,113]^1 - 1 = 0,113$$

Przeciętna półroczna stopa inflacji jest równa 11,3%.

Przykład 9.5

W poszczególnych miesiącach 2018 roku miesięczne stopy inflacji wynosiły odpowiednio: 1,9%; 1,4%; 1,3%; 1,6%; 1,7%; 2,0%; 2,0%; 2,0%; 1,9%; 1,8%; 1,3%; 1,1%. Wyznaczyć przeciętną stopę inflacji: a) miesięczną, b) kwartalną, c) półroczną.

Rozwiązanie:

Wykorzystując twierdzenie 9.1, otrzymujemy:

- a) przeciętną miesięczną stopę inflacji:

$$\bar{r}_i = [1,019 \cdot 1,014 \cdot 1,013 \cdot 1,016 \cdot 1,017 \cdot 1,02 \cdot 1,02 \cdot 1,02 \cdot 1,019 \cdot 1,018 \cdot 1,013 \cdot 1,011]^{1/12} - 1 = [1,219]^{1/12} - 1 = 0,0167$$

Przeciętna miesięczna stopa inflacji była równa 1,67%.

- b) przeciętną kwartalną stopę inflacji:

$$\bar{r}_i = [1,019 \cdot 1,014 \cdot 1,013 \cdot 1,016 \cdot 1,017 \cdot 1,02 \cdot 1,02 \cdot 1,02 \cdot 1,019 \cdot 1,018 \cdot 1,013 \cdot 1,011]^{1/4} - 1 = [1,219]^{1/4} - 1 = 0,0508$$

Przeciętna kwartalna stopa inflacji była równa 5,08%.

c) przeciętną półroczną stopę inflacji:

$$\bar{r}_i = [1,019 \cdot 1,014 \cdot 1,013 \cdot 1,016 \cdot 1,017 \cdot 1,02 \cdot 1,02 \cdot 1,02 \cdot 1,019 \cdot 1,018 \cdot 1,013 \cdot 1,011]^{1/2} - 1 = [1,219]^{1/2} - 1 = 0,1042$$

Przeciętna półroczna stopa inflacji była równa 10,42%.

Przykład 9.6

Roczna stopa inflacji wynosi 15%. Wyznaczyć średnią równoważną stopę inflacji: a) miesięczną, b) kwartalną, c) półroczną.

Rozwiązanie:

Wykorzystując definicję stopy równoważnej (rozdział 8, definicja 8.6), wyznaczamy odpowiednio:

$$\text{a) } (1 + \bar{r}_i)^{12} = 1,15 \rightarrow \bar{r}_i = 0,0117$$

$$\text{b) } (1 + \bar{r}_i)^4 = 1,15 \rightarrow \bar{r}_i = 0,0356$$

$$\text{c) } (1 + \bar{r}_i)^2 = 1,15 \rightarrow \bar{r}_i = 0,0724.$$

Średnie równoważne stopy inflacji wyniosły odpowiednio: miesięczna 1,17%, kwartalna 3,56%, półroczna 7,24%.

Przykład 9.7

Roczna stopa inflacji jest równa 7,5%. Jaka powinna być kwartalna (półroczna), w skali roku, stopa procentowa wkładów oszczędnościowych, aby oszczędności były o 3% wyższe (w skali roku) od stopy inflacji, przy założeniu kwartalnej (półrocznej) kapitalizacji?

Rozwiązanie

Kapitalizacja kwartalna:

$$\left(1 + \frac{r}{4}\right)^4 = (1 + 0,075) + (1 + 0,075) \cdot 0,03 = 1,1032$$

Kapitalizacja półroczna:

$$\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 = (1 + 0,075) + (1 + 0,075) \cdot 0,03 = 1,1045$$

Stopa procentowa wkładów oszczędnościowych powinna wynosić 10,32% przy kwartalnej kapitalizacji i 10,45% przy półrocznej kapitalizacji.

Przykład 9.8

Wyznaczyć realną stopę wzrostu lokaty pieniężnej, jeżeli nominalna roczna stopa procentowa wynosi w PKO BP 5,1%, a stopa inflacji w tym okresie jest równa 3,2%.

Rozwiązanie:

Wykorzystując wzór (9.4), otrzymujemy:

$$r_r = \frac{0,051 - 0,032}{1 + 0,032} = 0,0184$$

Realna stopa wzrostu lokaty pieniężnej jest równa 1,84%.

Przykład 9.9

Załóżmy, że klient wpłaca składkę roczną w wysokości 1500 zł i założmy indeksację 5%. Oblicz, jaka będzie dwudziesta roczna składka? Czy indeksacja dla klienta oznacza nominalny czy realny wzrost płaconych składek?

Rozwiązanie:

$$K_{20-1}^s = 1500 \cdot 1,05^{19} = 3790$$

Wysokość składki wyniesie 3790 zł i jest to wzrost nominalny.

Przykład 9.10

Jedna z polis klienta została zawarta na 10 lat i pierwsza roczna wpłata wyniosła 2000 zł. Przyjęto założenie, że roczna stopa zwrotu wynosi 5%. Jak będzie wyglądał harmonogram wpłat nominalnych uwzględniających roczną indeksację w wysokości 3%? Jaka będzie wysokość kwoty do wypłaty? Jakie będą realne wysokości składek przy założeniu 3% inflacji w okresie 10 lat?

Rozwiązanie:

Składka nominalna po upływie 1 roku (indeksacja) $\rightarrow 2000 \cdot 1,03^1 = 2060,00$

Składka powiększona o zakładane odsetki po upływie 1 roku
 $\rightarrow 2060 \cdot 1,05^9 = 3195,74$

Składka realna 1 roku (indeksacja) $\rightarrow 2060/1,03^9 = 1578,82$

Tablica 9.1. Harmonogram wpłat nominalnych

Okres trwania polisy	Składka	Składka + odsetki	Składka realna
10	2000,00	3257,79	1488,19
9	2060,00	3195,74	1578,82
8	2121,80	3134,86	1674,97
7	2185,45	3075,15	1776,97
6	2251,02	3016,58	1885,19
5	2318,55	2959,12	2000,00
4	2388,10	2902,76	2121,80
3	2459,75	2847,47	2251,02
2	2533,54	2793,23	2388,10
1	2609,55	2740,02	2533,54
Suma	22 927,76	29 922,72	19 698,60

Źródło: Opracowanie własne.

Kwota do wypłaty to 29 922,67 zł, suma wpłat to 22 927,71 zł. Po uwzględnieniu 3% inflacji 29 922,67 zł będzie warte tyle co dzisiejsze 22 265,28 zł, a realna suma wpłat wyniesie 19 698,60 zł.

Po przeczytaniu tego rozdziału Czytelnik powinien:

- umieć rozróżniać nominalną i realną stopę procentową,
- rozumieć znaczenie inflacji w gospodarce,
- umieć wyznaczyć wartość łącznej i średniej stopy inflacji,
- znać pojęcie indeksacji składki ubezpieczeniowej,
- rozumieć, w jaki sposób indeksacja wpływa na realną wartość ubezpieczenia.

Pytania sprawdzające

1. Jaka jest różnica między nominalną a realną stopą procentową?
2. W jaki sposób indeksacja wpływa na realną wartość ubezpieczenia?
3. Jakie są skutki występowania inflacji w gospodarce?
4. Kwartalna stopa inflacji wynosiła 2,4%. Wyznaczyć realną stopę procentową w tym okresie, jeżeli nominalna kwartalna stopa procentowa była równa 3,1%.
5. Miesięczna stopa inflacji wynosiła: w styczniu 3,1%, w lutym 1,7%, w marcu -0,3%. Obliczyć łączną stopę inflacji za te trzy miesiące oraz przeciętną miesięczną stopę inflacji.
6. Roczna kapitalizacja depozytów bankowych wynosiła w ciągu trzech pierwszych lat 2,5%, w ciągu trzech następnych 1,2%. Wyznaczyć

przeciętną roczną stopę procentową za ten 6-letni okres. Przeciętne miesięczne wynagrodzenie nominalne brutto w gospodarce narodowej w Polsce w pierwszym kwartale 2019 r. wynosiło 4950 zł [<https://stat.gov.pl/wskazniki-makroekonomiczne>]. Ustalono, że płace w poszczególnych kwartałach będą indeksowane co kwartał wskaźnikiem równym 0,7 stopy inflacji kwartału poprzedniego. Mając dane stopy inflacji w poszczególnych kwartałach 2,5%; 2,1%; 1,9% i 3,1%, w skali roku, wyznaczyć:

- a) przeciętne płace w poszczególnych kwartałach,
 - b) roczną stopę inflacji,
 - c) przeciętną kwartalną stopę inflacji,
 - d) realną stopę wzrostu zarobków.
7. Miesięczne stopy inflacji w poszczególnych miesiącach drugiego półrocza 2019 r. były odpowiednio równe: 2,9%; 2,8%; 2,2%; 2,3%; 2,5% i 3,6%. Wyznaczyć przeciętną:
- a) miesięczną stopę inflacji,
 - b) kwartalną stopę inflacji,
 - c) półroczną stopę inflacji.
8. Roczna stopa inflacji wynosi 6%. Wyznaczyć średnią równoważną stopę inflacji: a) miesięczną, b) kwartalną, c) półroczną.
9. Wyznaczyć realną stopę wzrostu lokaty pieniężnej, jeżeli nominalna roczna stopa procentowa wynosi w PKO BP 2,5%, a stopa inflacji w tym okresie jest równa 3%.
10. Jedna z polis klienta została zawarta na 30 lat i pierwsza roczna wpłata wyniosła 1000 zł. Przyjęto założenie, że roczna stopa zwrotu wynosi 3%. Jak będzie wyglądał harmonogram wpłat nominalnych uwzględniających roczną indeksację w wysokości 5%? Jaka będzie wysokość kwoty do wypłaty? Jakie będą realne wysokości składek przy założeniu 3,5% inflacji w okresie pierwszych 10 lat i w okresie kolejnych 20 lat będzie to 4,5% inflacji?

Rozdział 10

Rachunek rent

Sabina Nowak

Hasła: *renta i jej rodzaje: czasowa, wieczysta, odroczone, płatna z dołu, płatna z góry, uogólniona; równoważność rent*

W dorosłym życiu każdy spotyka się z pojęciem renty, nie tylko ten, któremu świadczenie pod taką nazwą przyznał ZUS. Renty otrzymujemy w postaci stypendiów, wynagrodzeń, dywidend i odsetek od kapitału. Z drugiej strony również my wypłacamy renty, rozumiane jako spłaty rat kredytu lub pożyczki, płacimy cyklicznie czynsz, chesne lub inne opłaty. Przedstawione w niniejszym rozdziale przykłady i zadania mogą być pomocne przy podejmowaniu decyzji dotyczących dysponowania nadwyżkami finansowymi w celu osiągnięcia optymalnej renty w zaplanowanym przez nas okresie w przyszłości, np. podczas dalszego studiowania. Mogą również okazać się przydatne przy zaciąganiu kredytu, biorąc pod uwagę możliwości jego spłaty, obecne i przyszłe.

10.1. Renta – definicja i klasyfikacje

Renta jest ciągiem płatności okresowych długoterminowych dokonywanych w równych odstępach czasu. W wąskim rozumieniu renta oznacza ciąg wypłat z tytułu świadczenia społecznego lub wypłat odsetek z ulokowanego kapitału. W szerszym kontekście, powszechnie przyjętym w matematyce finansowej, pod pojęciem renty rozumie się ciąg rat (wpłat lub wypłat) płaconych w równych odstępach czasu przez szereg stałych okresów, np. miesiące, kwartałów, lat. W takim rozumieniu przykładami renty są również comiesięczne wypłaty wynagrodzenia, ratalne spłaty kredytu lub pożyczki, płacone czynszu lub roczna dywidenda z tytułu posiadania akcji [Bijak, Podgórska, Utkin 1994, s. 134].

Płatności realizowane w ramach renty nazywane są ratami. Okres pomiędzy dwiema kolejnymi ratami określa się jako okres bazowy. Jako moment

początkowy wypłaty renty przyjmuje się $t=0$, a jako moment końcowy – koniec okresu, za który płacona jest ostatnia rata.

Renty można sklasyfikować ze względu na szereg różnych kryteriów. Ze względu na długość okresu wypłaty (lub inaczej – ze względu na liczbę rat) renty dzielimy na czasowe i wieczyste. Renta czasowa jest wypłacana przez skończoną liczbę następujących po sobie okresów. Renta wieczysta (zwana też czasami wieczną lub dożywotnią) dotyczy sytuacji, w której liczba okresów zmierza do nieskończoności (innymi słowy – wypłata takiej renty nie ma nigdy ustać [Kozubski 1998, s. 41]). Ze względu na moment wypłaty renty dzielą się na płatne z dołu, kiedy wypłata następuje na koniec (każdego) okresu, oraz renty płatne z góry – z wypłatą na początku (każdego) okresu. Z uwagi na częstotliwość dokonywanych wypłat renty dzielimy zwykle na miesięczne, kwartalne lub roczne. Z kolei ze względu na wysokość wypłat wyróżnia się renty o stałej i zmiennej wysokości wypłat, przy czym te ostatnie mogą zmieniać się w postępie arytmetycznym, geometrycznym bądź w sposób dowolny. Kolejno, z uwagi na wypłatę pierwszej raty, wyróżnia się renty odroczone, czyli renty płatne z dołu, których wypłata jest odroczone (przesunięta) o h okresów. Ostatnim kryterium jest porównanie częstotliwości wypłat rat i okresów kapitalizacji odsetek. Na poziomie elementarnym zakłada się, że moment płacenia raty i moment kapitalizacji odsetek pokrywają się, i takie renty nazywa się rentami prostymi. Na poziomie bardziej zaawansowanym rozważa się również renty określane jako uogólnione, dla których okresy płatności są dłuższe lub krótsze od okresów kapitalizacji odsetek⁸¹.

Renta prosta jest określana przez następujące charakterystyki [Bijak, Podgórska, Utkin 1994, s. 134; Podgórska, Klimkowska 2013, s. 153]:

- liczbę rat (lub, w przypadku renty wieczystej, wskazanie, że liczba rat jest nieskończenie duża i nieustalona),
- wysokość raty,
- długość okresu bazowego,
- moment płatności pierwszej raty,
- stopę procentową okresu bazowego,
- zasady naliczania odsetek.

W rachunku rent przyjmuje się zazwyczaj założenie o niezmienności długości okresu kapitalizacji oraz niezmienności wysokości stopy procentowej w całym okresie trwania renty.

⁸¹ Rentę czasową prostą płatną z dołu będziemy w dalszej części opracowania nazywać rentą zwykłą lub w skrócie rentą, zgodnie z regułą przyjętą w matematyce finansowej [zob. Podgórska, Klimkowska 2013, s. 153].

10.2. Wartość renty w dowolnym momencie. Równoważność rent

Kluczowym zagadnieniem rachunku rent jest określenie kapitału równoważnego rencie, czyli jej wycena. Wartość bieżącą renty można ustalić na dowolny moment t . Polega to na zaktualizowaniu wartości wszystkich rat na ten moment i obliczeniu ich sumy.

W praktyce najważniejsza jest wartość renty na początek i na koniec jej płatności. Zatem wartość początkowa (końcowa) renty jest odpowiednio sumą wartości rat zaktualizowanych na moment początkowy (końcowy) renty. Zgodnie z powyższą definicją wartość początkową renty można zapisać jako:

$$K_0 = \sum_{t=1}^n \frac{R_t}{(1+r)^t} \quad (10.1)$$

gdzie K_0 – wartość początkowa renty; R_t – rata płatna w chwili t , $t = 1, 2, \dots, n$; r – stopa procentowa okresu bazowego.

Wartość końcowa renty wynosi:

$$K_n = \sum_{t=1}^n \frac{R_t(1+r)^n}{(1+r)^t} \quad (10.2)$$

gdzie K_n – wartość końcowa renty; pozostałe oznaczenia jak we wzorze 10.1.

Z powyższych wzorów wynika, że

$$K_0(1+r)^n = K_n \quad (10.3)$$

co oznacza, że wartość początkowa i końcowa renty są równoważne.

Zgodnie z definicją dwie renty nazywane są równoważnymi, jeśli ich początkowe wartości są jednakowe.

10.3. Renty o stałych ratach: płatne z dołu, płatne z góry, wieczyste, odroczone

W przypadku renty zwykłej, czyli **renty czasowej płatnej z dołu**, każda rata jest wypłacana na koniec okresu bazowego. Jako momenty płatności przyjmuje się $1, 2, \dots, n$; momentem końcowym renty jest $t = n$. Wartość początkową takiej renty, czyli wielkość kapitału, jaką należy wpłacić obecnie, aby na końcu każdego okresu t ($t = 1, 2, \dots, n$) otrzymać rentę w stałej wysokości R jednostek

pieniężnych ($R_t = R$), zakładając kapitalizację okresową o stopie procentowej równej r , oblicza się ze wzoru:

$$K_0 = R \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+r)^t} \quad (10.4a)$$

Korzystając ze wzoru na sumę wyrazów skończonego szeregu geometrycznego⁸², wzór (10.4a) można zapisać w postaci:

$$K_0 = \frac{R}{r} \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right] \quad (10.4b)$$

Postępując w analogiczny sposób, wartość końcową takiej renty, definiowaną jako:

$$K_n = R \sum_{t=1}^n \frac{(1+r)^n}{(1+r)^t} \quad (10.5a)$$

można zapisać w postaci:

$$K_n = \frac{R}{r} [(1+r)^n - 1] \quad (10.5b)$$

Wartość początkową i końcową renty zwykłej można również przedstawić przy wykorzystaniu symboli stosowanych w naukach aktuarialnych jako:

$$K_0 = Ra_{\overline{n}|r} \quad (10.6a)$$

$$K_n = Rs_{\overline{n}|r} \quad (10.6b)$$

gdzie $a_{\overline{n}|r} = \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$ nazywa się n -okresowym czynnikiem dyskontowania renty, a $s_{\overline{n}|r} = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ n -okresowym czynnikiem oprocentowania renty.

Czynniki te można interpretować odpowiednio jako wartość początkową ($a_{\overline{n}|r}$) i końcową ($s_{\overline{n}|r}$) renty jednostkowej (czyli renty o n ratach w wysokości $R = 1$, przy stopie procentowej równej r). Zachodzi pomiędzy nimi zależność $s_{\overline{n}|r} = a_{\overline{n}|r} (1+r)^n$.

W przypadku **renty czasowej płatnej z góry** raty są płatne każdorazowo na początku okresu bazowego. Za momenty płatności przyjmuje się $0, 1, \dots, n-1$, a momentem końcowym renty jest $t = n$. Wartość początkową tak zdefiniowanej renty wyraża się wzorem:

⁸² $\sum_{i=1}^n q_i = \frac{q(1-q)^n}{1-q}$

$$K_0^{(+1)} = R + \frac{R}{(1+r)} + \frac{R}{(1+r)^2} + \dots + \frac{R}{(1+r)^{n-1}} \quad (10.7a)$$

który po wykonaniu stosownych przekształceń można sprowadzić do postaci równoważnej:

$$K_0^{(+1)} = \frac{R(1+r)}{r} \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right] \quad (10.7b)$$

Wartość końcowa renty płatnej z góry wynosi:

$$K_n^{(+1)} = R(1+r)^n \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{(1+r)^t} \quad (10.8a)$$

co można zapisać w postaci:

$$K_0^{(+1)} = \frac{R}{r}(1+r)[(1+r)^n - 1] \quad (10.8b)$$

Wartość początkową i końcową renty płatnej z góry także możemy wyrazić za pomocą czynnika oprocentowania lub dyskontowania renty, odpowiednio jako:

$$K_0^{(+1)} = R\ddot{a}_{\overline{n}|r} \quad (10.9a)$$

$$K_n^{(+1)} = R\ddot{s}_{\overline{n}|r} \quad (10.9b)$$

gdzie $\ddot{a}_{\overline{n}|r} = (1+r) \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$ oznacza czynnik dyskontowania renty, a $\ddot{s}_{\overline{n}|r} = (1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ – czynnik oprocentowania renty.

Czynnik $\ddot{a}_{\overline{n}|r}$ ($\ddot{s}_{\overline{n}|r}$) oznacza odpowiednio wartość początkową (kończącą) renty jednostkowej płatnej z góry. Warto zauważyć, że $\ddot{a}_{\overline{n}|r} = (1+r) a_{\overline{n}|r}$ oraz $\ddot{s}_{\overline{n}|r} = (1+r) s_{\overline{n}|r}$, a zatem renta jednostkowa płatna z góry jest rentą zwykłą przyspieszoną o jeden okres.

Dla **renty wieczystej** wycenę prowadzi się w oparciu o granicę sumy zaktualizowanych rat, zakładając, że $n \rightarrow \infty$.

Sensowne jest wyznaczenie jedynie wartości początkowej renty, która w przypadku **renty wieczystej płatnej z dołu** wynosi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_0 = K_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R}{r} \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right] = \frac{R}{r} \quad (10.10)$$

a dla **renty wieczystej płatnej z góry** jest równa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_0^{(+1)} = K_{\infty}^{(+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(1+r)}{r} \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right] = \frac{R(1+r)}{r} \quad (10.11)$$

Przykład 10.1

Instytucja finansowa wypłacająca rentę przyjmuje fundusz rentowy, zakładając kapitalizację złożoną kwartalną i oprocentowanie kwartalne na poziomie 2,5%. Jaki fundusz trzeba zgromadzić, aby instytucja mogła:

- na koniec każdego kwartału wypłacać rentę wieczystą w wysokości 3000 zł,
- na początek każdego kwartału wypłacać rentę wieczystą w wysokości 3000 zł.

Ile powinno wynosić oprocentowanie kwartalne, aby, przy wysokości funduszu wyznaczonego odpowiednio w punkcie a) i b), kwartalne wypłaty z dołu (z góry) były równe 5000 zł?

Rozwiązanie:

- a) dane: $R = 3000$; $r_4 = 2,5\%$; $n \rightarrow \infty$; $K_{\infty} = ?$

Korzystając ze wzoru (10.10), otrzymujemy $K_{\infty} = \frac{3000}{0,025} = 120\,000$ zł.

- b) dane: $R = 3000$; $r_4 = 2,5\%$; $n \rightarrow \infty$; $K_{\infty}^{(+1)} = ?$

Korzystając ze wzoru (10.11) otrzymujemy $K_{\infty}^{(+1)} = \frac{3000 \cdot (1 + 0,025)}{0,025} = 123\,000$ zł.

W przypadku kwartalnych wypłat w wysokości 5000 zł oprocentowanie kwartalne powinno być odpowiednio równe:

- dla renty płatnej z dołu:

$$r = \frac{R}{K_{\infty}} = \frac{5000}{120\,000} = 0,04166(6) = 4,167\%;$$

- dla renty płatnej z góry:

$$r = \frac{R}{K_{\infty}^{(+1)} - R} = \frac{5000}{123\,000 - 5000} = 0,04237 = 4,237\%.$$

Przykład 10.2

Twoim noworocznym postanowieniem jest wyjazd na wycieczkę zagraniczną w sierpniu bieżącego roku. Wycieczka kosztuje 8000 zł. Aby uzbierać kwotę na jej opłacenie, postanowiłeś wpłacać na koniec każdego miesiąca, począwszy od stycznia, stałą kwotę na swój rachunek bankowy oprocentowany według

miesięcznej stopy procentowej $r = 0,45\%$, z miesięczną kapitalizacją odsetek. Jaka powinna być wysokość raty, jeśli 1 sierpnia chcesz mieć na koncie założoną kwotę? Jak zmieniłaby się wysokość raty, gdyby wpłaty następowały na początku miesiąca?

Rozwiązanie:

Dane: $K_N = 8000$; $r = 0,45\%$; $n = 7$; $R = ?$

Przekształcamy wzór (10.6b) i otrzymujemy:

$$R = \frac{K_n}{s_{\overline{n}|r}} = \frac{K_n}{\frac{(1+r)^n - 1}{r}} = \frac{K_n r}{(1+r)^n - 1}$$

Stąd wysokość raty w przypadku wpłat dokonywanych na koniec miesiąca wynosi:

$$R = \frac{8000 \cdot 0,0045}{(1+0,0045)^7 - 1} = 1127,52 \text{ zł}$$

W przypadku rat wpłacanych na początku miesiąca korzystamy ze wzoru (10.8b) i po przekształceniu otrzymujemy:

$$R = \frac{K_n^{(+1)} r}{(1+r)[(1+r)^n - 1]} = 1122,47 \text{ zł}$$

Innym przypadkiem jest **renta odroczone**, czyli renta zwykła z opóźnionymi płatnościami. Wpłata renty odroczonej o m okresów ($m \in N$) następuje na koniec każdego okresu począwszy od m , a zatem w momentach $m+1$, $m+2$, ..., $m+n$.

Wartość początkową renty odroczonej o m okresów wyznacza się jako:

$$K_0^{(-m)} = R \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+r)^{m+i}} \quad (10.12a)$$

co można wyrazić za pomocą wartości początkowej renty zwykłej:

$$K_0^{(-m)} = R(1+r)^{-m} a_{\overline{n}|r} = \frac{K_0}{(1+r)^m} \quad (10.12b)$$

Z powyższej zależności wynika, że opóźnienie rat zmniejsza początkową wartość renty. Chcąc zachować wartość początkową renty odroczonej

o m okresów na poziomie K_0 , należałoby zwiększyć każdą ratę do wysokości $R(1+r)^m$, $t = 1, 2, \dots, n$.

Wartość końcowa renty odroczonej o m okresów jest równa wartości końcowej renty zwykłej:

$$K_n^{(-m)} = R \sum_{t=1}^n (1+r)^{n-t} = R s_{\overline{n}|r} = K_n \quad (10.13)$$

Stąd wynika, że w przypadku renty odroczonej o m okresów równoważność wartości początkowej i wartości końcowej renty można wyrazić jako:

$$K_0^{(-m)}(1+r)^{n+m} = K_n^{(-m)} \quad (10.14)$$

Z kolei wartość początkowa **renty wieczystej odroczonej** o m okresów wynosi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_0^{(-m)} = K_{\infty}^{(-m)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_0}{(1+r)^m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R}{r(1+r)^m} \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right] = \frac{R}{r(1+r)^m} \quad (10.15)$$

Przykład 10.3

Jaką kwotę powinienś wpłacić do banku przy oferowanej rocznej stopie procentowej $r = 10\%$ i rocznej kapitalizacji, aby w ciągu 15 lat otrzymywać rentę równą 2500 zł:

- płatną na początku roku,
- płatną na koniec roku,
- której płatności rozpoczną się po upływie 10 lat od momentu wpłaty środków do banku.

Rozwiązanie:

- dane: $R = 2500$; $r = 10\%$; $n = 15$; $K_0 = ?$

Korzystając ze wzoru (10.6a), otrzymujemy:

$$K_0 = 2500 a_{\overline{15}|10\%} = 2500 \frac{1 - (1+0,1)^{-15}}{0,1} = 19\,015,20 \text{ zł.}$$

- dane $R = 2500$; $r = 10\%$; $n = 15$; $K_0^{(+1)} = ?$

Korzystając ze wzoru (10.9), otrzymujemy:

$$K_0^{(+1)} = 2500 \ddot{a}_{\overline{15}|10\%} = 2500 \cdot 1,1 \cdot \frac{1 - (1+0,1)^{-15}}{0,1} = 20\,916,72 \text{ zł.}$$

c) dane $R = 2500$; $r = 10\%$; $n = 15$; $K_0^{(-10)} = ?$

Korzystając ze wzoru (10.12b), otrzymujemy:

$$K_0^{(-10)} = K_0(1 + 0,1)^{-10} = 7331,18 \text{ zł.}$$

W pierwszym przypadku powinieneś wpłacić do banku 19 015,20 zł, zaś w drugim – 20 916,72 zł. Jeśli jesteś zainteresowany rentą odroczoną, wpłata powinna wynosić 7331,18 zł.

Korzystając ze wzorów (10.6a) i (10.6b), można wyprowadzić wzory na liczbę rat przy założonej wartości początkowej renty prostej K_0 :

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{rK_0}{R}\right)}{\ln(1+r)} \quad \text{dla} \quad \left(1 - \frac{rK_0}{R}\right) > 0 \quad (10.16a)$$

lub określonej wartości końcowej renty prostej K_n :

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{rK_n}{R}\right)}{\ln(1+r)} \quad (10.16b)$$

Warto zauważyć, że liczba rat n określona wzorem (10.16a) lub (10.16b) na ogół nie jest liczbą całkowitą. Otrzymany wynik wymaga często zaokrąglenia, np. poprzez przyjęcie całkowitej części otrzymanej liczby lub dodanie do części całkowitej rozwiązania wartości 1. Taka korekta wymaga modyfikacji wysokości rat – albo wszystkich proporcjonalnie, albo tylko ostatniej [Bijak, Podgórska, Utkin 1994, s. 145].

Przykład 10.4

Zamierzasz przeprowadzić remont swojego mieszkania. W tym celu musisz zgromadzić na swoim koncie oszczędnościowym:

- a) 15 000 zł (opcja 1, remont kuchni i łazienki),
- b) 25 000 zł (opcja 2, optymistyczna, remont całego mieszkania).

Postanowiłeś, że będziesz wpłacać systematycznie 1000 zł na koniec każdego miesiąca, poczynając od stycznia. Ilu wpłat musisz dokonać, aby zebrać założoną kwotę, jeśli nominalna stopa procentowa wynosi 12,6%, a odsetki na rachunku bankowym kapitalizowane są co miesiąc?

Rozwiązanie:

- a) dane: $K_n = 15\,000$; $R = 1000$; $r_{12} = 12,6\%/12 = 1,05\%$; $n = ?$

Ze wzoru (10.16b) otrzymujemy:

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{0,0105 \cdot 15\,000}{1000}\right)}{\ln(1 + 0,0105)} = 14,00277$$

Z niewielkim przybliżeniem możemy przyjąć, że liczba wpłat wyniesie 14, zatem należy się spodziewać, że rozpoczynając wpłaty w styczniu danego roku, na koniec lutego kolejnego roku osiągniesz swój cel. Warto jednak zauważyć, że $s_{14|1,05\%} = \frac{(1 + 0,0105)^{14} - 1}{0,0105} = 14\,996,81$ zł, zatem do osiągnięcia założonego celu zabraknie 3 zł i 18 groszy. O taką kwotę należałoby powiększyć ostatnią wpłatę.

- b) dane: $K_n = 25\,000$; $R = 1000$; $r_{12} = 12,6\%/12 = 1,05\%$; $n = ?$

$$n = \frac{n\left(1 + \frac{0,0105 \cdot 25\,000}{1000}\right)}{\ln(1 + 0,0105)} = 22,31576$$

Na początek przyjmiemy za liczbę rat wartość całkowitą otrzymanego wyniku, $n = 22$. Po wpłacie 22 rat w wysokości 1000 zł na rachunku bankowym zgromadzisz $s_{22|1,05\%} = \frac{(1 + 0,0105)^{22} - 1}{0,0105} = 24\,604,08$ zł. Z kolei przyjmując jako rozwiązanie wartość całkowitą wyniku powiększoną o 1, $n = 23$, otrzymamy $s_{23|1,05\%} = 25\,862,43$ zł. W pierwszym przypadku ostatnią ratę w wysokości 1395,92 zł powinieneś wpłacić w październiku kolejnego roku, w drugim zaś – ostatnia rata, wpłacana w listopadzie kolejnego roku, wyniesie 137,57 zł⁸³.

10.4. Renta uogólniona

Rentą uogólnioną nazywamy ciąg płatności, w którym częstotliwość wypłat nie pokrywa się z okresem kapitalizacji odsetek. Zakłada się przy tym, że odsetki za poszczególne podokresy naliczane są zgodnie z zasadą oprocentowania składanego.

Wyróżnia się dwa rodzaje renty uogólnionej:

- 1) rentę, w której okres bazowy = $n \cdot$ okres kapitalizacji,
- 2) rentę, w której okres kapitalizacji = $n \cdot$ okres bazowy,

⁸³ Więcej podobnych przykładów można znaleźć w rozdziale 6 pracy [Adamczak, Majewska 2003].

gdzie n jest dowolną liczbą naturalną, przy czym w pierwszym (drugim) przypadku początek okresu bazowego (kapitalizacji) pokrywa się z początkiem jednego z okresów kapitalizacji (bazowych)⁸⁴.

Przykład 10.5

Oblicz końcową wartość kapitału zgromadzonego przez fundusz ubezpieczeniowy przy założeniu, że dokonano 40 kwartalnych wpłat w wysokości 250 zł na rachunek bankowy oprocentowany według nominalnej stopy procentowej równej 10%, jeśli kapitalizacja odsetek odbywa się a) co kwartał, b) co rok, c) co miesiąc.

Rozwiązanie:

Dane: $n = 40$; $R = 250$; $r = 10\%$; $K_n = K_{40} = ?$

- a) Mamy w tym przypadku do czynienia z rentą prostą, w której okres bazowy pokrywa się z okresem kapitalizacji odsetek. Wystarczy policzyć kwartalną stopę procentową $r_4 = 10\% / 4 = 2,5\%$. Korzystamy ze wzoru (10.6b) i otrzymujemy:

$$K_{40} = Rs_{40|2,5\%} = 250 \cdot \frac{(1,025)^{40} - 1}{0,025} = 16\,850,64 \text{ zł.}$$

- b) Renta uogólniona, typ (2) – okres kapitalizacji (rok) jest czterokrotnie dłuższy od okresu bazowego (kwartał). Musimy wyznaczyć stopę procentową kwartalną przy kapitalizacji rocznej, która jest równoważna stopie nominalnej 10%: $r = (1 + 0,10)^{1/4} - 1 = 2,4114\%$. Następnie wyliczamy $K_n = K_{40}$ zgodnie ze wzorem (10.6b) i otrzymujemy $K_{40} = 16\,523,21 \text{ zł}$.

- c) Renta uogólniona, typ (1) – okres bazowy (kwartał) jest trzykrotnie dłuższy od okresu kapitalizacji (miesiąc). Tym razem musimy zamienić stopę oprocentowania na stopę kwartalną równoważną miesięcznej kapitalizacji: $r = (1 + 0,008333)^3 - 1 = 2,5209\%$ (wcześniej wyznaczamy miesięczną stopę procentową jako $r_{12} = 10\%/12 = 0,833\%$). K_{40} obliczone zgodnie ze wzorem (10.6b) wynosi 16 928,95 zł.

Przykład 10.6

Zadecydowałeś, że będziesz gromadzić fundusz rentowy. Na dobry początek wniosłeś wpłatę w wysokości 2000 zł. Przez kolejne 15 lat zamierzasz wpłacać taką samą kwotę na koniec każdego kwartału.

⁸⁴ Więcej na temat renty uogólnionej zob. np. [Podgórska, Klimkowska 2013, s. 173–178; Jaworski, Micał 2005, s. 123–150].

- Jaki fundusz rentowy zgromadzisz, jeśli kwartalna stopa procentowa wyniesie 3%?
- Ile wyniesie miesięczna renta płaćna z góry przez okres 10 lat, przy założeniu miesięcznej stopy procentowej równej 1%?
- Przez jaki okres będziesz mógł pobierać miesięczną ratę w wysokości 6000 zł płaćną z dołu, przy niezmiennym oprocentowaniu?

Rozwiązanie:

- a) dane: $n = 15 \cdot 4 = 60$; $R = 2000$; $r_4 = 3\%$; $K_n = K_{60} = ?$

Korzystając z wzoru (10.6b) i pamiętając o pierwszej wpłacie „ekstra”, obliczamy wartość końcową renty:

$$K_n = K_{60} = 2000 \cdot 1,03^{60} + 2000 \cdot s_{\overline{60}|3\%} = 337\,890,08 \text{ zł.}$$

- b) dane: $n = 10 \cdot 12 = 120$; $K_0^{(+1)} = 337\,890,08$; $r_{12} = 1\%$; $R = ?$

Przekształcamy wzór (10.9a) i wyznaczamy wysokość miesięcznej płaćności:

$$R = \frac{K_0^{(+1)}}{\ddot{a}_{\overline{n}|r}} = \frac{337\,890,08}{(1+0,01)^{\frac{1-(1+0,01)^{-120}}{0,01}}} = 4799,74 \text{ zł.}$$

- c) dane: $K_0 = 337\,890,08$; $r_{12} = 1\%$; $R = 6000$; $n = ?$

$$\text{Wykorzystujemy wzór (1.16a): } n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{0,01 \cdot 337\,890,08}{6000}\right)}{\ln(1+0,01)} = 82,23. \text{ Liczba}$$

miesięcznych rat wyniesie 82, co oznacza wypłatę renty przez 6 lat i 10 miesięcy. Ponieważ wynik nie jest liczbą całkowitą, i jest większy od 82, oznacza to, że nie cały fundusz zostanie wypłacony. Do wypłaty pozostanie jeszcze $R_{83} = 337\,890,08 \cdot 1,01^{83} - 6000 \cdot s_{\overline{83}|1\%} = 1371,37 \text{ zł.}$

Po lekturze tego rozdziału Czytelnik powinien:

- znać pojęcie renty;
- umieć wyznaczyć wysokość pojedynczej raty dla różnych rodzajów renty: płaćnej z dołu, płaćnej z góry, wieczystej, odroczonej o m okresów;
- umieć wyznaczyć wartość początkową i końcową renty płaćnej z dołu, płaćnej z góry, wieczystej, odroczonej o m okresów.

Pytania sprawdzające

- Z tytułu ubezpieczenia rentowego przez najbliższe 25 lat będziesz otrzymywać miesięczne świadczenie w wysokości 1500 zł. Zakładamy, że nominalna stopa procentowa wyniesie 12%, a odsetki są kapitalizowane

co miesiąc. Jaką kwotę powinna dziś zgromadzić firma ubezpieczeniowa, jeśli:

- a) świadczenia będą wypłacane na koniec każdego miesiąca,
- b) świadczenia będą wypłacane na początku miesiąca?

O ile wyższa powinna być ta kwota, gdyby renta miała być wieczysta?

2. W dniu narodzin dziecka rodzice zdeponowali w banku kwotę 30 000 zł w celu zabezpieczenia renty, której płatność miałaby się rozpocząć po ukończeniu przez dziecko 18 roku życia i trwać przez następne 10 lat. Bank stosuje kapitalizację roczną, a nominalna stopa procentowa wynosi 10%.
 - a) Jaka jest wysokość raty renty rocznej płatnej z dołu?
 - b) Jaka jest wysokość raty miesięcznej renty płatnej z dołu przy pozostałych warunkach niezmiennych?
3. Po ukończeniu studiów podjąłeś stałą pracę w wieku 24 lat. Przez kolejnych 15 lat wpłacałeś na fundusz emerytalny kwotę 200 zł na koniec każdego miesiąca. Obowiązywała wówczas nominalna stopa procentowa na poziomie 10%, a odsetki były kapitalizowane co rok. Przez kolejne 10 lat wpłacałeś na fundusz 500 zł miesięcznie, przy nominalnej stopie procentowej 8% i niezmiennym systemie naliczania odsetek. Jaką miesięczną rentę płatną z dołu rentę będziesz pobierał przez 12 lat po zakończeniu gromadzenia środków w sposób opisany wyżej, zakładając, że nominalna stopa procentowa w okresie pobierania renty wyniesie 6%? Ile wyniesie wysokość takiej renty, jeśli będzie płatna z góry?

Rozdział 11

Ratalna spłata długów

Sabina Nowak

Hasła: *spłata długu, rata, odsetki, część kapitałowa i część odsetkowa raty długu, rata annuitetowa*

Marzenia o byciu rentierem nieczęsto się spełniają. Częściej musimy sięgać po kredyt – na studia, samochód, mieszkanie, podróże itp. Decyzja o zaciągnięciu kredytu jest jedną z najważniejszych decyzji finansowych podejmowanych w życiu. Przykłady zawarte w tym rozdziale pomogą Czytelnikom w wyborze kredytu najbardziej korzystnego pod względem czasu spłaty, wysokości rat (stałej lub zmiennej) oraz możliwości jednorazowej spłaty odsetek (priorytetowo lub przy ostatniej racie). Po wykonaniu zadań Czytelnicy będą potrafili samodzielnie sporządzić optymalny harmonogram spłat kredytu i będą dobrze przygotowani do rozmowy w banku.

11.1. Spłaty odsetek i kapitału

Przedmiotem rozważań w niniejszym podrozdziale jest dług powstały w chwili $t = 0$ w wyniku przekazania przez wierzyciela kapitału w wysokości $S_0 > 0$ dłużnikowi. Dłużnik spłaca dług w sposób ratalny, za pomocą n rat o wartości $R_j \geq 0$ w równo oddalonych momentach, $j = 1, 2, \dots, n$. Okres oddzielający dwa kolejne momenty spłaty nazywamy okresem bazowym. Dla uproszczenia zakładamy, że kwota S_0 wypłacana jest jednorazowo, a raty obejmują pożyczony kapitał i naliczone odsetki, natomiast nie zawierają innych kosztów obsługi długu, takich jak prowizja, opłaty manipulacyjne czy ubezpieczenie długu. Przyjmujemy, że oprocentowanie odsetek w okresie bazowym wynosi r , $r > 0$.

Zgodnie z zasadą równoważności długu i rat dług o wartości S_0 w momencie $t = 0$ jest równoważny ciągowi rat w wysokości R_j płatnych w momentach

$j = 1, 2, \dots, n$, jeśli kapitały przekazane sobie przez wierzyciela i dłużnika są równoważne [Podgórska, Klimkowska 2013, s. 185]. Wynika z tego, że wartość długu zaktualizowana na moment jego umorzenia⁸⁵ jest równa łącznej wartości rat zaktualizowanych na ten sam moment, co można zapisać jako:

$$S_0(1+r)^n = \sum_{i=1}^n R_i(1+r)^{n-i} \quad (11.1)$$

Ciąg rat R_j można porównać do renty prostej płatnej z dołu, z wartością początkową $K_0 = S_0$ i wartością końcową $K_n = S_0(1+r)^n$.

Rozpatrując aktualizację na dowolny moment $j = 1, 2, \dots, n$, warunek równoważności możemy zapisać jako:

$$S_0(1+r)^j = \sum_{m=1}^j R_m(1+r)^{j-m} + \sum_{m=j+1}^n R_m(1+r)^{j-m} \quad (11.2)$$

gdzie $\sum_{m=1}^j R_m(1+r)^{j-m}$ oznacza sumę rat zapłaconych do chwili j , a $\sum_{m=j+1}^n R_m(1+r)^{j-m}$ – sumę rat pozostających do zapłaty.

Dług bieżący można przedstawić w ujęciu retrospektywnym jako kapitał pozostały do spłaty w momencie j , po zapłaceniu raty R_j :

$$S_j = S_0(1+r)^j - \sum_{m=1}^j R_m(1+r)^{j-m} \quad (11.3a)$$

lub w ujęciu prospektywnym jako sumę rat pozostających do zapłaty w okresach, $j+1, \dots, n$:

$$S_j = \sum_{m=j+1}^n R_m(1+r)^{j-m} \quad (11.3b)$$

Jeśli zapiszemy:

$$\sum_{m=j+1}^n R_m(1+r)^{j-m} = \sum_{m=j}^n R_m(1+r)^{j-m} - R_j = (1+r) \sum_{m=j}^n R_m(1+r)^{j-1-m} - R_j \quad (11.4)$$

oraz, wynikające z (11.3b):

$$S_{j-1} = \sum_{m=j}^n R_m(1+r)^{j-1-m} \quad (11.5)$$

⁸⁵ Jeśli wartość długu zaktualizujemy na moment 0, równanie (11.1) przyjmie postać $S_0 = \sum_{i=1}^n R_i(1+r)^{-i}$.

otrzymamy:

$$S_j = (1 + r)S_{j-1} - R_j \quad (11.6)$$

Stąd wiadomo, że wartość, o jaką dług zmniejsza się w j -tym okresie, $S_{j-1} - S_j$, wynosi:

$$S_{j-1} - S_j = R_j - rS_{j-1} \quad (11.7)$$

gdzie rS_{j-1} jest wartością odsetek należnych za okres j , O_j .

W związku z powyższym ratę R_j możemy zapisać jako sumę dwóch składników

$$R_j = U_j + O_j \quad (11.8)$$

gdzie $U_j = S_{j-1} - S_j$ oznacza część kapitałową raty, a $O_j = rS_{j-1}$ – część odsetkową. Ponieważ

$$\sum_{j=1}^n (S_{j-1} - S_j) = \sum_{j=1}^n U_j = S_0 \quad (11.9)$$

dług bieżący można przedstawić w zależności od części kapitałowych U_j w ujęciu retrospektywnym⁸⁶:

$$S_j = S_0 - \sum_{m=1}^j U_m \quad (11.10a)$$

i ujęciu prospektywnym:

$$S_j = \sum_{m=j+1}^n U_m \quad (11.10b)$$

Zależność (11.10a) odzwierciedla, iż dług bieżący odpowiada długowi początkowemu pomniejszonemu o sumę rat kapitałowych już zapłaconych, natomiast (11.10b) wskazuje, że dług bieżący jest równy sumie niezapłaconych rat kapitałowych⁸⁷.

Warto zauważyć, że sumowanie rat kapitałowych U_j we wzorach (11.9) oraz (11.10a) i (11.10b) jest dopuszczalne, z uwagi na to, iż część kapitałowa U_j raty

⁸⁶ Indukcyjny dowód tej zależności można znaleźć w pracy [Podgórska, Klimkowska 2013, s. 192].

⁸⁷ Relacje (11.10a) i (11.10b) stanowią analogię do retrospektywnej i prospektywnej zależności długu bieżącego od rat R_j (por. wzory (10.19a) i (10.19b)).

R_j określa tę część kapitału początkowego S_0 , która jest spłacana w j -tej racie, a zatem odnosi się do momentu początkowego (jest obliczana na moment 0). Nie można sumować w taki prosty sposób, bez aktualizacji, części odsetkowych O_j , ani rat R_j . Odsetki zaktualizowane na moment 0 oblicza się ze wzoru:

$$O_{(0)} = \sum_{j=1}^n O_j (1+r)^{-j} \quad (11.11)$$

zaś zaktualizowane na dowolny moment m jako:

$$O_{(m)} = O_{(0)} (1+r)^m \quad (11.12)$$

Wartość $O_{(m)}$ odzwierciedla kwotę potrzebną do spłaty całości odsetek od długu, jednorazowo w momencie m .

Priorytet spłaty odsetek polega na tym, że podczas spłaty długu odsetki zwracane są w pierwszej kolejności, przed spłatą kapitału. Oznacza to, że:

- a) jeżeli $R_j \geq O_j$, to rata R_j spłaca należne odsetki O_j i pomniejsza dług kapitałowy o wartość $U_j = R_j - O_j$
- b) jeżeli $R_j < O_j$, to rata R_j spłaca odsetki równe O_j i powiększa dług kapitałowy o wartość $O_j - R_j$ ⁸⁸.

Przykład 11.1

Kredyt w wysokości 3000 zł jest spłacany w czterech ratach kwartalnych. Pierwsza rata wynosi 700 zł, druga i trzecia – po 800 zł. Kwartalna stopa procentowa wynosi 5%.

- 1) Wyznacz wysokość czwartej raty zgodnie z zasadą równoważności długu i rat.
- 2) Oblicz dług bieżący po zapłaceniu:
 - a) pierwszej raty,
 - b) trzeciej raty.
- 3) Sporządź schemat spłaty długu w poniższej tabeli, gdzie j oznacza numer okresu bazowego ($j = 1, 2, 3, 4$); S_{j-1} – wysokość długu bieżącego na początku okresu j ; R_j – ratę płatną w j -tym okresie; O_j – część odsetkową raty R_j ; U_j – część kapitałowa raty R_j ; S_j – dług bieżący na koniec okresu j (po zapłaceniu j -tej raty).

⁸⁸ Mówimy wówczas o tzw. ujemnym umorzeniu długu.

j	S_{j-1}	R_j	O_j	U_j	S_j
1					
...					
n					
Suma					

Rozwiązanie:

1) Na początku wyznaczamy wysokość ostatniej, czwartej raty.

Aktualizujemy dług na moment 0, korzystając ze wzoru (11.1):

$$3000 = 700(1 + 0,05)^{-1} + 800(1 + 0,05)^{-2} + 800(1 + 0,05)^{-3} + R_4(1 + 0,05)^{-4}$$

$$R_4 = 3000(1,05)^4 - 700(1,05)^3 - 800(1,05)^2 - 800 \cdot 1,05; R_4 = 1114,18 \text{ zł.}$$

2a) Dług bieżący po zapłaceniu pierwszej raty ($j = 1$):

– obliczony zgodnie z ujęciem retrospektywnym (por. wzór (11.3a)):

$$S_1 = 3000(1 + 0,05) - 700 = 2450.$$

– obliczony zgodnie z ujęciem prospektywnym (por. wzór (11.3b)):

$$S_1 = 800(1,05)^{-1} + 800(1,05)^{-2} + 1114,18(1,05)^{-3} = 2450.$$

2b) Dług bieżący po zapłaceniu trzeciej raty ($j = 3$):

– obliczony zgodnie z ujęciem retrospektywnym (por. wzór (11.3a)):

$$S_3 = 3000(1,05)^3 - 700(1,05)^2 - 800(1,05)^1 - 800(1,05)^0 = 1061,125.$$

– obliczony zgodnie z ujęciem prospektywnym (por. wzór (11.3b)):

$$S_3 = 1114,18(1,05)^{-1} = 1061,125.$$

3) Obliczamy poszczególne wartości potrzebne do uzupełnienia schematu spłaty długu, rozpoczynając od pierwszej raty:

$$j = 1; S_{j-1} = S_0 = 3000; R_1 = 700; O_1 = rS_{j-1} = 0,05 \cdot 3000 = 150; U_1 = r_1 - O_1 = 700 - 150 = 550; S_1 = S_0 - U_1 = 3000 - 550 = 2450.$$

Analogicznie, po zapłacie drugiej raty otrzymujemy:

$$j = 2; S_{j-1} = S_1 = 2450; R_2 = 800; O_2 = rS_{j-1} = 0,05 \cdot 2450 = 122,5; U_2 = R_2 - O_2 = 800 - 122,5 = 677,5; S_2 = S_1 - U_2 = 2450 - 677,5 = 1772,5.$$

Kontynuując obliczenia, dochodzimy do następującego schematu spłaty długu:

Tablica 11.1 Schemat spłaty długu dla danych z przykładu 11.1

j	S_{j-1}	R_j	O_j	U_j	S_j
1	3000	700	150	550	2450
2	2450	800	122,5	677,5	1772,5
3	1772,5	800	88,625	711,38	1061,125
4	1061,125	1114,18	53,056	1061,12	0
Suma	x	x	x	3000	X

Źródło: Opracowanie własne.

11.2. Dług o stałych kwotach płatności

Rozważmy spłatę długu S_0 ratami o jednakowej wysokości $R_j = R$, $j = 1, 2, \dots, n$. Zgodnie z zasadą równoważności kapitału (por. wzór (11.1)), $S_0 = R \sum_{j=1}^n (1+r)^{-j}$, czyli:

$$S_0 = R a_{\overline{n}|r} \quad (11.13)$$

gdzie $a_{\overline{n}|r}$ oznacza n -okresowy czynnik oprocentowania renty (por. wzór (10.6a)).

W przypadku **kredytu o stałych ratach**, zwanych **ratami annuitetowymi**, zależność długu bieżącego od rat w ujęciu retrospektywnym przedstawia się następująco:

$$S_j = S_0 (1+r)^j \left(1 - \frac{a_{\overline{n-j}|r}}{a_{\overline{n}|r}} \right) \quad (11.14a)$$

zaś w ujęciu prospektywnym jako:

$$S_j = S_0 \frac{a_{\overline{n-j}|r}}{a_{\overline{n}|r}} \quad (11.14b)$$

Część kapitałową raty annuitetowej można zapisać jako:

$$U_j = U_1 (1+r)^{j-1} \quad (11.15)$$

Ciąg wartości U_j jest zatem ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $U_1 = R - S_0$ i ilorazie $1+r$. Stąd wynika, że $U_j = U_{j-1}(1+r)$, a zatem w przypadku

spląty długu ratami o jednakowej wysokości, w każdej kolejnej racie dłużnik zwraca wierzycielowi kapitał $(1+r)$ razy większy niż w racie poprzedniej.

Łączna wartość odsetek zaktualizowana na moment 0 (por. wzór (11.11)) wynosi:

$$O_{(0)} = S_0 - \frac{N}{1+r}(R - S_0 r) \quad (11.16)$$

Przykład 11.2

Kredyt w wysokości 5000 zł wypłacany w momencie $t=0$ jest spłacany w pięciu kwartalnych ratach o jednakowej wysokości. Kwartalna stopa oprocentowania kredytu wynosi 1,1%.

- 1) Wyznacz wysokość rat annuitetowej zgodnie z zasadą równoważności długu i rat.
 - 2) Sporządź schemat spląty długu zgodnie z tablicą z przykładu 11.1.
- Obliczamy wysokość rat, korzystając ze wzoru (11.13):

$$R = \frac{S_0}{a_{\overline{n}|r}} = \frac{S_0}{\frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}} = \frac{5000}{\frac{1 - (1+0,011)^{-5}}{0,011}} = 1033,24 \text{ zł}$$

Wyliczamy poszczególne wartości potrzebne do uzupełnienia schematu spląty długu, rozpoczynając od pierwszej raty:

$$j=1; S_{j-1}=5000; R=1033,24; O_1=rS_0=0,011 \cdot 5000=55; U_1=R-O_1=1033,24-55=978,24; S_1=S_{j-1}-U_1=5000-978,24=4021,76.$$

Analogicznie, po zapłacie drugiej raty otrzymujemy:

$$j=2; S_{j-1}=S_1=4021,76; R=1033,24; O_2=rS_1=0,011 \cdot 4021,76=44,24; U_2=R-O_2=1033,24-44,24=989; S_2=S_1-U_2=4021,76-989=3032,76.$$

Kontynuujemy obliczenia do $j=5$ i dochodzimy do następującego schematu spląty długu:

Tablica 11.2. Schemat spląty długu dla danych z przykładu 11.2

j	S_{j-1}	R_j	O_j	U_j	S_j
1	5000	1033,24	55	978,24	4021,76
2	4021,76	1033,24	44,24	989	3032,76
3	3032,76	1033,24	33,36	999,88	2032,88
4	2032,88	1033,24	22,36	1010,88	1022
5	1022	1033,24	11,24	1022	0
Suma	x	x	x	3000	X

Źródło: Opracowanie własne.

11.3. Dług o stałych ratach kapitałowych

Drugim typem raty stosowanej zwyczajowo przy spłacie kredytu jest – obok raty annuitetowej – rata o stałej części kapitałowej. Za pomocą takiej raty w każdym kolejnym okresie bazowym $j = 1, 2, \dots, n$ umarza się taką samą część długu kapitałowego równą $\frac{S_0}{n}$ oraz spłaca bieżące odsetki O_j . Można zatem zapisać, iż:

$$U_j = U = \frac{S_0}{n} \quad (11.17)$$

$$S_{j-1} - S_j = U \quad (11.18)$$

Przy wyborze spłaty długu ratami o stałej części kapitałowej:

- ciąg wartości długu bieżącego S_j ($j = 1, 2, \dots, n$) jest ciągiem arytmetycznym o początkowym wyrazie S_j i różnicy $-U$;
- ciąg wartości odsetek O_j ($j = 1, 2, \dots, n$) jest ciągiem arytmetycznym o początkowym wyrazie równym iloczynowi $S_0 r$ i różnicy $-Ur$.

Dług bieżący na koniec j -tego okresu (po zapłaceniu j -tej raty) wyraża się zatem jako (11.18), natomiast część odsetkową O_j raty R_j zapisać można w postaci:

$$O_j = S_0 r - (j-1)Ur = [nU - (j-1)U]r = (n-j+1)Ur \quad (11.19)$$

Z powyższego wynika, że ciąg rat R_j , $j = 1, 2, \dots, n$, jest również ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie $S_0 r + U$ i różnicy $-Ur$.

Wartość raty $R_j = O_j + U$ można przedstawić jako:

$$R_j = (n-j+1)Ur + U = [1 + (n-j+1)r]U \quad (11.20)$$

Łączna wartość odsetek zaktualizowana na moment 0 wynosi:

$$O_{(0)} = (n - a_{\overline{n}|r})U \quad (11.21)$$

Przykład 11.3

Rozważmy ponownie kredyt w wysokości 5000 zł spłacany w pięciu kwartalnych ratach, tym razem zakładając, że będą to raty o stałej części kapitałowej. Kwartalna stopa oprocentowania kredytu wynosi 1,1%. Sporządź schemat spłaty długu zgodnie z tablicą z przykładu 11.1.

Rozwiązanie:

Kapitałową część raty wyznaczamy według wzoru (11.17) $U_j = U = \frac{5000}{5} = 1000$, $j = 1, 2, \dots, 5$. Odsetkową część raty wyliczamy zgodnie ze wzorem (11.19), a dług bieżący według wzoru (11.18). I tak dla kolejnych rat wyniki wynoszą:

$j = 1$; $S_{j-1} = S_0 = 5000$; $U = 1000$; $O_1 = (6 - 1 + 1)1000 \cdot 0,011 = 66$; $R_1 = U + O_1 = 1066$; $S_1 = S_0 - U = 5000 - 1000 = 4000$;

$j = 2$; $S_{j-1} = S_1 = 4000$; $U = 1000$; $O_2 = (6 - 2 + 1)1000 \cdot 0,011 = 55$; $R_1 = U + O_1 = 1055$; $S_2 = S_1 - U = 4000 - 1000 = 3000$.

Kontynuujemy obliczenia do $j = 5$ i otrzymujemy następujący schemat spłaty długu:

Tablica 11.3. Schemat spłaty długu dla danych z przykładu 11.3

j	S_{j-1}	R_j	O_j	U_j	S_j
1	5000	1066	66	1000	4000
2	4000	1055	55	1000	3000
3	3000	1044	44	1000	2000
4	2000	1033	33	1000	1000
5	1000	1022	22	1000	0
Suma	x	x	x	3000	X

Źródło: Opracowanie własne.

Szczególnym przypadkiem spłaty długu za pomocą stałych rat kapitałowych jest możliwość jednorazowej spłaty odsetek.

Założmy, że dłużnik w każdym okresie j , $j = 1, 2, \dots, n$, spłaca jednakową część długu kapitałowego $\frac{S_0}{n}$, a w wybranym momencie m , $1 \leq m \leq n$, jednorazowo spłaca łączną wartość odsetek ze wszystkich okresów.

Należy zaktualizować łączną wartość odsetek na moment m (por. wzór (11.21)):

$$O_{(m)} = (n - a_{\overline{n}|r})(1 + r)^m U \quad (11.22)$$

Otrzymamy wówczas ciąg rat R_j w wysokości U dla $j \neq m$ oraz

$$R_j = O_{(m)} + U \text{ dla } j = m \quad (11.23)$$

Przykład 11.4

Kontynuujemy rozważania nad spłatą kredytu w wysokości 5000 zł w pięciu kwartalnych ratach, przy założeniu, że są to raty o stałej części kapitałowej. Zmieniamy założenie dotyczące spłaty odsetek: tym razem mają zostać spłacone jednorazowo, razem z ostatnią ratą. Kwartalna stopa oprocentowania kredytu niezmiennie wynosi 1,1%. Jak będzie wyglądał schemat spłaty długu, jeśli:

- a) utrzymamy w mocy założenie priorytetu spłaty odsetek,
- b) uchylimy założenie priorytetu spłaty odsetek.

Rozwiązanie:

Na początek wyznaczamy kwotę potrzebną do jednorazowej spłaty odsetek w okresie $m = 5$, zgodnie ze wzorem (11.22):

$$O_{(5)} = (5 - a_{\overline{5}|1,1\%})(1 + 0,011)^5 \cdot 1000 = \left(5 - \frac{1 - (1,011)^{-5}}{0,011}\right)(1,011)^5 \cdot 1000 = 169,90.$$

Raty wyniosą zatem $R_j = 1000$ dla $j = 1, 2, 3, 4$ oraz $R_j = 1169,90$ dla $j = 5$.

- a) zakładamy priorytet spłaty odsetek

$j = 1$; $S_{j-1} = S_0 = 5000$; $R_1 = 1000$; obliczamy wartość niespłaconych odsetek $O_1 = 5000 \cdot 0,011 = 55$; $U_1 = R_1 - O_1 = 1000 - 55 = 945$; $S_1 = S_0 - U_1 = 5000 - 945 = 4055$;

$j = 2$; $S_{j-1} = S_1 = 4055$; $R_2 = 1000$; $O_2 = 4055 \cdot 0,011 = 44,605$; $U_2 = R_2 - O_2 = 1000 - 44,605 = 955,395$; $S_2 = S_1 - U_2 = 4055 - 955,395 = 3099,605$;

$j = 3$; $S_{j-1} = S_2 = 3099,605$; $R_3 = 1000$; $O_3 = 3099,605 \cdot 0,011 = 34,096$; $U_3 = R_3 - O_3 = 1000 - 34,096 = 965,904$; $S_3 = S_2 - U_3 = 3099,605 - 965,904 = 2133,701$;

$j = 4$; $S_{j-1} = S_3 = 2133,701$; $R_4 = 1000$; $O_4 = 2133,701 \cdot 0,011 = 23,471$; $U_4 = R_4 - O_4 = 1000 - 23,471 = 976,529$; $S_4 = S_3 - U_4 = 2133,701 - 976,529 = 1157,172$;

$j = 5$; $S_{j-1} = S_4 = 1157,172$; $R_5 = 1169,90$; $O_5 = 1157,172 \cdot 0,011 = 12,728$; $U_5 = R_5 - O_5 = 1169,90 - 12,728 = 1157,17$; $S_5 = S_4 - U_5 = 1157,172 - 1157,172 = 0$.

Schemat spłaty długu przedstawia się następująco:

Tablica 11.4. Schemat spłaty długu dla danych z przykładu 11.4 a)

j	S_{j-1}	R_j	O_j	U_j	S_j
1	5000	1000	55	945	4055
2	4055	1000	44,605	955,395	3099,605
3	3099,605	1000	34,096	965,904	2133,701
4	2133,701	1000	23,471	976,529	1157,172
5	1157,172	1169,9	12,728	1157,172	0
Suma	X	x	169,9	5000	X

Źródło: Opracowanie własne.

b) uchylamy założenie priorytetu spłaty odsetek

Każda rata R_j , $j = 1, 2, 3, 4$, stanowi zwrot kapitału, natomiast odsetki naliczane za j -ty okres nie są spłacane i będą kapitalizowane na koniec okresu. Oznaczmy przez O_j^* odsetki spłacane ratą R_j , a przez $U_j^* = R_j - O_j^*$ – kapitał spłacany ratą R_j . Odsetki O_j^* wynoszą 0 dla $j = 1, 2, 3, 4$, natomiast $O_5^* = 169,90$ (obliczone zgodnie ze wzorem (11.22)). $U_j^* = 1000$ dla $j = 1, 2, \dots, 5$. Tym razem wartość bieżącą kapitału S_j obliczamy, pomniejszając S_{j-1} o spłacone odsetki O_j^* i spłacony kapitał U_j^* , natomiast powiększając o naliczone, niespłacone, skapitalizowane odsetki, obliczane jako $O_j = S_{j-1}r$. Dla kolejnych rat wykonujemy następujące obliczenia:

$$j = 1; O_1 = 5000 \cdot 0,011 = 55; R_1 = 1000; O_1^* = 0; U_1^* = 1000; S_1 = S_0 - O_1^* - U_1^* + O_1 = 5000 - 0 - 1000 + 55 = 4055;$$

$$j = 2; O_2 = 4055 \cdot 0,011 = 44,605; R_2 = 1000; O_2^* = 0; U_2^* = 1000; S_2 = S_1 - O_2^* - U_2^* + O_2 = 4055 - 0 - 1000 + 44,605 = 3099,605;$$

$$j = 3; O_3 = 3099,605 \cdot 0,011 = 34,096; R_3 = 1000; O_3^* = 0; U_3^* = 1000; S_3 = S_2 - O_3^* - U_3^* + O_3 = 3099,605 - 0 - 1000 + 34,096 = 2133,701;$$

$$j = 4; O_4 = 2133,701 \cdot 0,011 = 23,471; R_4 = 1000; O_4^* = 0; U_4^* = 1000; S_4 = S_3 - O_4^* - U_4^* + O_4 = 2133,701 - 0 - 1000 + 23,471 = 1157,172;$$

$$j = 5; O_5 = 1157,172 \cdot 0,011 = 12,728; R_5 = 1169,90; O_5^* = 169,902; U_5^* = 1000; S_5 = S_4 - O_5^* - U_5^* + O_5 = 1157,172 - 169,902 - 1000 + 12,728 = 0.$$

Schemat spłaty długu tym razem przedstawia się następująco:

Tablica 11.5. Schemat spłaty długu dla danych z przykładu 11.4 b)

j	S_{j-1}	R_j	O_j^*	U_j^*	S_j
1	5000	1000	0	1000	4055
2	4055	1000	0	1000	3099,605
3	3099,605	1000	0	1000	2133,701
4	2133,701	1000	0	1000	1157,172
5	1157,172	1169,90	169,90	1000	0
Suma	x	x	169,90	5000	X

Źródło: Opracowanie własne.

Więcej przykładów dotyczących spłaty długu przy ustalonych ratach kapitałowych oraz zadanych kwotach płatności (również z uwzględnieniem opóźnienia okresu spłat rat) można znaleźć w literaturze przedmiotu⁸⁹.

Po lekturze tego rozdziału Czytelnik powinien:

- umieć sporządzić schemat spłaty długu (wyznaczyć wysokość długu bieżącego, wysokość raty i jej części odsetkowej oraz kapitałowej);
- umieć sporządzić schemat spłaty długu o stałych (annuitetowych) ratach;
- umieć sporządzić schemat spłaty długu o stałych ratach kapitałowych.

Pytania sprawdzające

1. Kredyt w wysokości 4500 zł ma zostać spłacony w sześciu ratach miesięcznych. Pierwsza rata wynosi 800 zł, druga, trzecia i czwarta – po 750 zł. Piąta rata ma być równa 0 zł.
 - a) Wyznacz wysokość ostatniej raty zgodnie z zasadą równoważności długu i rat.
 - b) Oblicz dług bieżący po spłacie drugiej i piątej raty.
2. Sporządź schemat spłaty długu w wysokości 8000 zł spłacanego:
 - a) w sześciu kwartalnych ratach annuitetowych;
 - b) w pięciu kwartalnych ratach o stałej części kapitałowej;

⁸⁹ Por. m.in. [Bijak, Podgórska, Utkin 1994; Jaworski, Micał 2005; Kozubski 1998; Podgórska, Klimkowska 2013; Sobczyk 1995].

- c) w czterech kwartalnych ratach o stałej części kapitałowej przy założeniu, że odsetki zostaną spłacone jednorazowo z ostatnią, czwartą ratą.

Kwartałna stopa procentowa wynosi 2%.

Literatura

- Aczel A.D. (2017), *Statystyka w zarządzaniu*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Aczel A.D. (1989), *Complete business statistics*, Richard D. Irwin Inc., Homewood.
- Adamczak A., Majerowska E. (2003), *Matematyka finansowa w przykładach i zadaniach*, Wydawnictwo Wyższej szkoły Finansów i Rachunkowości w Sopocie, Sopot.
- Babbie E. (2005), *Badania społeczne w praktyce*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Balicki A., Wycinka E. (2003), *Pomiar koncentracji na rynku ubezpieczeń życiowych*, Prace i Materiały Wydziału Zarządzania Uniwersytetu Gdańskiego, nr 2.
- Bażańska T., Nykowska M. (2004), *Matematyka w zadaniach dla wyższych zawodowych uczelni ekonomicznych*, Oficyna Wydawnicza Branta, Warszawa.
- Bednarczyk T., Bielawska K., Jackowska B., Wycinka E. (2019), *Ekonomiczne i demograficzne uwarunkowania funkcjonowania i rozwoju ubezpieczeń*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk.
- Bętkowska J., Skraba J., *Badanie Geerta Hofstede*, https://mfiles.pl/pl/index.php/Badanie_Geerta_Hofstede [dostęp: 7.08.2019].
- Bijak W., Podgórska M., Utkin J. (1994), *Matematyka finansowa. Teoria i praktyka obliczeń finansowych*, Wydawnictwo Bizant, Warszawa.
- Bikker J., Haaf K. (2002), *Measures of Competition and Concentration in the Banking Industry: a Review of the Literature*, Economic and Financial Modelling, Research Series Supervision 27, Netherlands Central Bank, Directorate Supervision.
- Biuletyn Kwartalny. Rynek ubezpieczeń 4/2018* (2019), Komisja Nadzoru Ubezpieczeniowego, Warszawa.
- Biuletyn Państwowego Urzędu Nadzoru za rok 2000* (2003), Warszawa.
- Cieciura M., Zacharski J. (2011), *Podstawy probabilistyki z przykładami zastosowań w informatyce*, Warszawa.
- Crawshaw J., Chambers J. (2001), *A concise course in advanced level statistics*, Fourth edition, Nelson Thornes Ltd.
- Czerwonka L., Pankau E. (2005), *Zastosowanie wskaźników koncentracji rynku do oceny koncentracji kapitału w gospodarce światowej* [w:] *Funkcjonowanie gospodarki polskiej w warunkach integracji i globalizacji*, red. D. Kopycińska, Katedra Mikroekonomii Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin.
- Dobija M. (1995), *Podstawy matematyki finansowej i ubezpieczeniowej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Dubejko U. (2007), *Wykorzystanie analizy ekonomicznej przy określaniu siły rynkowej przedsiębiorców w sprawach z zakresu nadużywania pozycji dominującej i kontroli połączeń* [w:]

- Konkurencja w gospodarce współczesnej*, Urząd Ochrony Konkurencji i Konsumentów, Warszawa.
- Dutang C., Charpentier A. (2019), *CASdatasets: Insurance datasets*, <http://cas.uqam.ca/> [dostęp: 18.07.2019].
- Francuz P., Mackiewicz R. (2007), *Liczyby nie wiedzą skąd pochodzą*, KUL, Lublin.
- Friedman M. (2018), *Kapitalizm i wolność*, Onepress, Warszawa.
- Graficzna prezentacja danych statystycznych. Wykresy, mapy (2014), Główny Urząd Statystyczny, Warszawa.
- Grzegorzewski P. i inni (2001), *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka*, WSISiZ, Warszawa.
- Handsche J. (2009), *Polskie doświadczenie w formowaniu i rozwoju rynku ubezpieczeń – wybrane aspekty*, „Wiadomości Ubezpieczeniowe”, nr 3.
- Horizontal Mergers Guidelines* (08/19/2010), U.S. Department of Justice and the Federal Trade Commission, <https://www.justice.gov/atr/horizontal-merger-guidelines-08192010> [dostęp: 21.08.2019].
- <http://geert-hofstede.com> [dostęp: 30.09.2019].
- <http://www.tylervigen.com/spurious-correlations> [dostęp: 30.09.2019].
- <https://stat.gov.pl/obszary-tematyczne/ceny-handel/> [dostęp: 30.10.2019].
- <https://stat.gov.pl/wskazniki-makroekonomiczne> [dostęp: 30.10.2019].
- Hossack I.B., Pollard J.H., Zehnwirth B. (1992), *Introductory statistics with applications in general insurance*, Cambridge University Press.
- Jak ubezpieczenia zmieniają Polskę i Polaków* (2017), PIU Warszawa, https://piu.org.pl/wp-content/uploads/2017/12/171205_raport_wplywu_dlugi.pdf [dostęp: 17.07.2019].
- Jaworski P., Micał J. (2005), *Modelowanie matematyczne w finansach i ubezpieczeniach*, Wydawnictwo Poltext, Warszawa.
- Johnson P.D., Hey G.B., *Statistical Studies in Motor Insurance*, „Journal of Institute of Actuaries”, Vol. 97, part II–III.
- Jóźwiak J., Podgórski J. (2003), *Statystyka od podstaw*, wyd. 6, PWE, Warszawa.
- Keller G. (2012), *Managerial statistics*, 9th edition, South-Western Cengage Learning.
- King M., Minium E.W. (2009), *Statystyka dla psychologów i pedagogów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Klimkowska J., Podgórska M. (2019), *Matematyka finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Koronacki J., Mielniczuk J. (2009), *Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Kot S.M., Jakubowski J., Sokołowski A. (2011), *Statystyka*, Wydawnictwo Difin, Warszawa.
- Kozubski J.J. (1998), *Matematyczne modelowanie wybranych procesów finansowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk.
- Kramaric T., Kitic M. (2012), *Comparative Analysis of Concentration in Insurance Markets in New EU Member States*, „International Journal of Social, Behavioral, Educational, Economic, Business and Industrial Engineering”, Vol. 6, No. 6.

- Kwiatkowska E. (2014), *Miary koncentracji – teoria i praktyka ich wykorzystania przez organy regulacyjne na rynkach telekomunikacyjnych*, „Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych”, t. XV/3.
- Lissowski G., Haman J., Jasiński M. (2008), *Podstawy statystyki dla socjologów*, t. 1, Wydawnictwo Naukowe Scholar, Warszawa.
- Makać W. (2003), *Podstawy statystyki i demografii dla studentów administracji*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk.
- Makać W., Urbanek-Krzysztofiak D. (2008), *Metody opisu statystycznego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk.
- Malinowski A. (2004), *Statystyka opisowa dla studentów administracji i prawa*, Wydawnictwo Liber, Warszawa.
- Marai S. (2011), *W podróży*, tłum. T. Worowska, Fundacja Zeszytów Literackich, Warszawa.
- Matczak M. (2016), *Wykorzystanie strukturalnych miar koncentracji w analizie konkurencyjności rynku morskich przewozów kontenerowych*, „Problemy Transportu i Logistyki”, nr 3 (35).
- Małłoka M., Wojcieszyn B. (2000), *Matematyka z elementami zastosowań w ekonomii*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej, Poznań.
- Mill J.S. (1962), *System logiki dedukcyjnej i indukcyjnej*, PWN, Warszawa.
- Młodinow L. (2011), *Matematyka niepewności. Jak przypadki wpływają na nasz los*, tłum. P. Strzelecki, Wydawnictwo Prószyński i S-ka, Warszawa.
- Nawojczyk M. (2004), *Przewodnik po statystyce*, SPSS Polska.
- Oceny działalności instytucji publicznych* (2017), Fundacja Centrum Badania Opinii Społecznej, https://www.cbos.pl/SPISKOM.POL/2017/K_067_17.pdf [dostęp: 20.07.2019].
- Ostasiewicz S., Rusnak Z., Siedlecka U. (2006), *Statystyka. Elementy teorii i zadania*, wyd. 6, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław.
- Ostasiewicz W. (2011), *Badania Statystyczne*, Wolters Kluwer, Warszawa.
- Podgórska M., Klimkowska J. (2013), *Matematyka finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Polski rynek ubezpieczeniowy* (2017), GUS, Warszawa.
- Rao C.R. (1994), *Statystyka i prawda*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Raport z badania rynku ubezpieczeń komunikacyjnych – UOKiK* (2018), <https://www.uokik.gov.pl>.
- Raport o stanie sektora ubezpieczeń po I kwartale 2019* (2019), KNF, Warszawa.
- Rocznik rynku ubezpieczeń. Informacje o krajowych zakładach ubezpieczeń* (2017), KNF, Warszawa.
- Rocznik Statystyczny Ubezpieczeń Społecznych 2012–2014* (2016), ZUS, Warszawa.
- Raport roczny 2017 PIU* (2017), PIU, Warszawa, <https://piu.org.pl/raportroczny2017/zestawienia-tabelaryczne-rynek-ubezpieczen-liczbach/> [dostęp: 17.07.2019].
- Raport roczny 2018* (2018), PIU, Warszawa, <https://piu.org.pl/wp-content/uploads/2018/07/Raport-Roczny-PIU-2017.pdf> [dostęp 17.07.2019].
- Ross S. (2002), *A first course in probability*, 6th edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New York.

- Ross S. (2010), *Introductory statistics*, 3rd edition, Elsevier.
- Sadowski W. (1987), *Statystyka na co dzień*, PWE, Warszawa.
- Schutt R., O'Neil C. (2014), *Badanie danych*, Helion, Gliwice.
- Shao J. (2003), *Mathematical statistics*, 2nd edition, Springer.
- Skibińska R. (2019), *Ubezpieczenia na życie w kryzysie*, <https://www.obserwatorfinansowy.pl/forma/rotator/ubezpieczenia-na-zycie-w-kryzysie/> [dostęp: 7.06.2019].
- Sobczyk M. (1995), *Matematyka finansowa. Podstawy teoretyczne, przykłady, zadania*, Agencja Wydawnicza Placet, Warszawa.
- Sobczyk M. (2005), *Statystyka*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Sobczyk M. (2006), *Matematyka finansowa. Podstawy teoretyczne, przykłady, zadania*, Wydawnictwo Placet, Warszawa.
- Starzyńska W. (2008), *Statystyka praktyczna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Struktura wysokości świadczeń wypłacanych przez ZUS po waloryzacji w marcu 2019 roku (2019), ZUS, Warszawa.
- Szreder M. (2016), *Pensja w portfelu i w Excelu*, „Polityka” nr 9.
- Szreder M. (2004), *Metody i techniki sondażowych badań opinii*, PWE, Warszawa.
- Tarczyński M. (2019), *Wolimy zaklinać, czyli 5 głównych wniosków z badania PIU*, <https://piu.org.pl/blogpiu/wolimy-zaklinac-czyli-5-glownych-wnioskow-z-badania-piu/> [dostęp: 5.09.2019].
- Wicka A., Miedzik A. (2010), *Rodzaje ubezpieczeń i czynniki decydujące o wyborze ubezpieczyciela*, http://www.wne.sggw.pl/czasopisma/pdf/PEFIM_2010_T4_nr53_s264.pdf, [dostęp: 15.07.2019].
- Wieczorkowska G., Kochański P., Eljaszuk M. (2004), *Statystyka, wprowadzenie do analizy danych sondażowych i eksperymentalnych*, Wydawnictwo Naukowe Scholar, Warszawa.
- Wieczorkowska G., Wierzbński J. (2007), *Statystyka. Analiza badań społecznych*, Wydawnictwo Naukowe Scholar, Warszawa.
- Winkler R. (1967), *The quantification of judgment: Some methodological suggestions*, „Journal of the American Statistical Association”, Vol. 62, No. 320.
- Wyjaśnienia w sprawie kryteriów i procedury zgłaszania zamiaru koncentracji prezesowi UOKiK (2015), <https://www.uokik.gov.pl/download.php?id=1269> [dostęp: 19.08.2019].
- Wypadki drogowe w Polsce w 2018 roku (2019), Komenda Główna Policji, Biuro Ruchu Drogowego, Warszawa, <http://statystyka.policja.pl/st/ruch-drogowy/76562,Wypadki-drogowe-raporty-rocne.html>.
- Wymiary kultury organizacyjnej (2015), <http://managemagazine.pl/wymiary-kultury-organizacyjnej/> [dostęp: 7.08.2019].
- Wytyczne w sprawie oceny horyzontalnego połączenia przedsiębiorstw na mocy rozporządzenia Rady w sprawie kontroli koncentracji przedsiębiorstw, Dziennik Urzędowy Unii Europejskiej (2004/C 31/03).

Akty prawne

Rozporządzenie Rady (WE) nr 139/2004 z dnia 20 stycznia 2004 r. w sprawie kontroli koncentracji przedsiębiorstw, Dz. Urz. UE L 24 z 29.01.2004.

Obwieszczenie w sprawie ogłoszenia jednolitego tekstu rozporządzenia Ministra Finansów w sprawie dodatkowych sprawozdań finansowych i statystycznych zakładów ubezpieczeń i zakładów reasekuracji, Dz. U. z dnia 20 lutego 2018 r., poz. 392.

Ustawa z dnia 16 lutego 2007 r. o ochronie konkurencji i konsumentów, Dz. U. Nr 50, poz. 331 z późn. zm.

Ustawa z dnia 11 września 2015 r. o działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej, t.j. Dz. U. z 2019 r., poz. 381.

Spis tablic

Tablica 1.1. Wybrane cechy jakościowe wraz z wariantami	17
Tablica 1.2. Przykładowe populacje związane z tematyką ubezpieczeń	18
Tablica 1.3. Zakłady ubezpieczeń pozostałych osobowych i majątkowych według liczby grup prowadzonej działalności w 2017 r.	19
Tablica 1.4. Rozkład liczby grup ubezpieczeń w zakładach ubezpieczeń pozostałych osobowych i majątkowych w 2017 r.	21
Tablica 1.5. Rozkład liczby grup ubezpieczeń w zakładach ubezpieczeń pozostałych osobowych i majątkowych w 2017 r.	21
Tablica 1.6. Rozkład wieku osób ubezpieczonych posiadających polisę OC w okresie od 1 do 15 lipca 2019 r.	23
Tablica 1.7. Struktura wypłaconych rent rodzinnych według pokrewieństwa z osobą, po której przyznano świadczenie w grudniu 2014 r.	23
Tablica 1.8. Osoby ubezpieczone według liczby posiadanych polis i wysokości miesięcznego dochodu na osobę (badanie przeprowadzone w Polsce w okresie październik–grudzień w latach 2005–2007)	24
Tablica 2.1. Parametry opisujące strukturę zbiorowości statystycznej	37
Tablica 2.2. Parametry i ich wartości w rozkładzie liczby grup ubezpieczeń pozostałych osobowych i majątkowych w zakładach ubezpieczeń w Polsce w 2017 r.	39
Tablica 2.3. Rozkład liczby roszczeń przypadających na jedną polisę w ciągu roku	40
Tablica 2.4. Wartości pozycyjnych parametrów liczby roszczeń przypadających na jedną polisę	41
Tablica 2.5. Składka przypisana brutto zakładów ubezpieczeń na życie w latach 2016–2017	42
Tablica 2.6 Parametry położenia rozkładu wysokości składki przypisanej brutto w 2016 i 2017 r. z uwzględnieniem i bez uwzględnienia PZU ŻYCIE SA w mln zł	44
Tablica 2.7. Wartości parametrów dyspersji i asymetrii wysokości składki przypisanej brutto w 2016 i 2017 r.	45

Tablica 2.8. Wartości parametrów klasycznych rozkładu wieku (w latach) osób posiadających polisę OC (dane umowne)	47
Tablica 2.9. Wartości parametrów pozycyjnych rozkładu wieku (w latach) kierowców posiadających polisę OC w 2019 r.	47
Tablica 2.10. Wysokość składki przypisanej brutto (w mln zł) według rodzajów ubezpieczeń oraz ich udział (w %) w Dziale II w 2010 i 2017 r.	49
Tablica 2.11. Struktura składki przypisanej brutto w Dziale I w 2010 i 2017 r. (w %)	51
Tablica 2.12. Liczba wypadków według wieku sprawcy wypadku – kierującego pojazdem oraz wskaźnik liczby wypadków na 10 000 osób w Polsce w 2018 r.	54
Tablica 2.13. Ofiary wypadków drogowych według wieku i skutków wypadku w 2018 r.	55
Tablica 2.14. Wysokość kosztów administracyjnych zakładów ubezpieczeń w 2016 r. i 2017 r. w tys. zł	56
Tablica 2.15. Wysokość odszkodowań i świadczeń wypłaconych brutto (mln zł) przez zakłady ubezpieczeń Działu II w 2016 i 2017 r.	57
Tablica 2.16. Struktura ubezpieczeń w Dziale I (w %) w latach 2005, 2010, 2017	58
Tablica 3.1. Obliczenia pomocnicze do oceny koncentracji na rynku ubezpieczeń w Polsce w Dziale II w 2018 r.	62
Tablica 3.2. Obliczenia pomocnicze do wyznaczania krzywych koncentracji na rynku ubezpieczeń w Polsce w Dziale II w 2018 r.	67
Tablica 3.3. Wybrane wskaźniki koncentracji Działu I rynku ubezpieczeń w Polsce w latach 1995–2002	70
Tablica 4.1. Wysokość składek przypisanych brutto (w mln zł) oraz odszkodowań i świadczeń wypłaconych brutto (w mln zł) w Dziale I największych ubezpieczycieli w Polsce w 2017 r. oraz przypisane im pozycje	77
Tablica 4.2. Decyzja przejścia na wcześniejszą emeryturę a płeć	82
Tablica 4.3. Poziom wykształcenia a liczba posiadanych polis ubezpieczeniowych	84
Tablica 4.4. Poziom dochodu a liczba posiadanych polis ubezpieczeniowych	84
Tablica 5.1. Odszkodowania i świadczenia wypłacone brutto (w mln zł) w latach 2008–2017 – wartości empiryczne i średnie ruchome 3- i 5-okresowe	90
Tablica 5.2. Liczba wypadków drogowych latach 2015–2018 oraz średnie ruchome 4-okresowe	93

Tablica 5.3. Wartość składki przypisanej brutto <i>per capita</i> (w zł) w Dziale I i II w latach 2012–2017 i wysokość zmian w porównaniu z rokiem poprzednim (w zł)	96
Tablica 5.4. Wartość składki przypisanej brutto <i>per capita</i> (w zł) w Dziale I i II w latach 2012–2017 i wysokość zmian w porównaniu z rokiem 2012 (w zł)	97
Tablica 5.5. Zmiana wysokości składki przypisanej brutto <i>per capita</i> (w zł) w Dziale I i II w latach 2012–2017, rok poprzedni = 100	99
Tablica 5.6. Zmiana wysokości składki przypisanej brutto <i>per capita</i> (w zł) w Dziale I i II w latach 2012–2017, rok 2012 = 100	100
Tablica 5.7. Wartość składki przypisanej brutto (w zł) w Dziale I i II w latach 2012–2017	102
Tablica 5.8. Dynamika odszkodowań i świadczeń wypłaconych brutto przez zakłady ubezpieczeń w Polsce w latach 2009–2017	102
Tablica 6.1. Liczba roszczeń zgłoszonych dla polis OC posiadaczy pojazdów mechanicznych zakupionych w 2004 i 2005 r. w Australii	113
Tablica 6.2. Rozkład prawdopodobieństwa liczby roszczeń	115
Tablica 6.3. Dystrybuanta liczby roszczeń	115
Tablica 6.4. Prawdopodobieństwo wartości odszkodowań przy założonej funkcji gęstości rozkładu	118
Tablica 7.1. Prawdopodobieństwa rozkładu dwumianowego dla $n = 8$ (ośmiu pracowników), $p = 0,1$ (prawdopodobieństwo roszczenia to 0,1)	123
Tablica 7.2. Prawdopodobieństwa rozkładu Poissona dla $\lambda = 1,2$	125
Tablica 7.3. Prawdopodobieństwo wartości odszkodowań dla rozkładu normalnego z parametrami $\mu = 50$, $\sigma = 12$	129
Tablica 7.4. Prawdopodobieństwo wartości odszkodowań dla rozkładu wykładniczego z $\lambda = 0,04$	132
Tablica 7.5. Prawdopodobieństwo wartości odszkodowań dla rozkładu chi kwadrat z $v = 45$	134
Tablica 7.6. Liczba roszczeń dla polis OC posiadaczy pojazdów mechanicznych zgłoszonych do francuskiego zakład ubezpieczeń w okresie od stycznia 2003 do czerwca 2004 r.	136
Tablica 7.7. Aproksymacja liczby roszczeń dla polis OC posiadaczy pojazdów mechanicznych zgłoszonych do francuskiego zakład ubezpieczeń w okresie od stycznia 2003 do czerwca 2004 r. rozkładem Poissona . . .	137
Tablica 7.8. Przykładowy rozkład wysokości odszkodowań	138

Tablica 7.9. Aproksymacja rozkładu wysokości odszkodowań dla przykładowych danych	138
Tablica 7.10. Wartość odszkodowań dla polis OC posiadaczy pojazdów mechanicznych wypłaconych przez francuski zakład ubezpieczeń w okresie od stycznia 2003 do czerwca 2004 r.	139
Tablica 7.11. Aproksymacja wartości odszkodowań wypłaconych przez francuski zakład ubezpieczeń w okresie od stycznia 2003 do czerwca 2004 r. rozkładem jednostajnym	140
Tablica 7.12. Aproksymacja wartości odszkodowań wypłaconych przez francuski zakład ubezpieczeń w okresie od stycznia 2003 do czerwca 2004 r. rozkładem normalnym o parametrach $\mu = 1304$, $\sigma = 1841$	141
Tablica 7.13. Aproksymacja wartości odszkodowań wypłaconych przez francuski zakład ubezpieczeń w okresie od stycznia 2003 do czerwca 2004 r. rozkładem wykładniczym z parametrem $\lambda = 0,0008$	142
Tablica 7.14. Aproksymacja wartości odszkodowań wypłaconych przez francuski zakład ubezpieczeń w okresie od stycznia 2003 do czerwca 2004 r. rozkładem chi kwadrat z parametrem $v = 1000$	143
Tablica 7.15. Wartość kolejno zgłoszonych szkód (euro) oraz kwota wypłacona przez zakład ubezpieczeń (euro) z polis A, B, C przy ustalonej sumie ubezpieczenia na poziomie 1000 euro	146
Tablica 9.1. Harmonogram wpłat nominalnych	176
Tablica 11.1 Schemat spłaty długu dla danych z przykładu 11.1	198
Tablica 11.2. Schemat spłaty długu dla danych z przykładu 11.2	199
Tablica 11.3. Schemat spłaty długu dla danych z przykładu 11.3	201
Tablica 11.4. Schemat spłaty długu dla danych z przykładu 11.4 a)	203
Tablica 11.5. Schemat spłaty długu dla danych z przykładu 11.4 b)	204

Spis rysunków

Rysunek 1.1. Liczba grup ubezpieczeń w zakładach ubezpieczeń pozostałych osobowych i majątkowych w 2017 r.	26
Rysunek 1.2. Rozkład wieku osób ubezpieczonych posiadających polisę OC w okresie od 1 do 15 lipca 2019 r.	27
Rysunek 1.3. Zaświadczenia lekarskie z tytułu choroby własnej wydane osobom ubezpieczonym w ZUS w 2014 r. według grup wieku ubezpieczonych . . .	27
Rysunek 1.4. Struktura rencistów, którym renty z tytułu niezdolności do pracy wypłaca ZUS według wysokości świadczeń i płci świadczeniobiorców w marcu 2019 r.	28
Rysunek 1.5. Struktura osób uprawnionych do renty rodzinnej po małżonku wypłaconych w grudniu 2014 r. według wieku	28
Rysunek 1.6. Struktura składki brutto na świecie w 2016 r. według kontynentów i poziomu gospodarczego	29
Rysunek 1.7. Struktura wypłaconych rent rodzinnych według pokrewieństwa z osobą, po której przyznano świadczenie w grudniu 2014 r.	29
Rysunek 1.8. Koszty działalności ubezpieczeniowej Działu II w Polsce w mln zł i ich struktura w % w latach 2017–2018	30
Rysunek 2.1. Składka przypisana brutto zakładów ubezpieczeń na życie w 2016 i 2017 r. (w mln zł)	43
Rysunek 2.2. Składka przypisana brutto zakładów ubezpieczeń na życie w 2016 i 2017 r. (w mln zł)	46
Rysunek 2.3. Struktura składki przypisanej brutto w Dziale II w 2010 i 2017 r. (w %)	51
Rysunek 2.4. Struktura składki przypisanej brutto w Dziale I w 2010 i 2017 r. (w %)	52
Rysunek 3.1. Krzywa koncentracji rynku ubezpieczeń (Dział II) w Polsce w 2018 r.	67
Rysunek 3.2. Krzywa Lorenza dla rynku ubezpieczeń (Dział II) w Polsce w 2018 r.	69
Rysunek 4.1. Niechęć do ryzyka w krajach Europy (w pkt) a penetracja rynku ubezpieczeniowego (proc. PKB) w 2015 r.	75

Rysunek 4.2. Wysokość składek przypisanych brutto (w mln zł) oraz odszkodowań i świadczeń wypłaconych brutto (w mln zł) w Dziale I największych ubezpieczycieli w Polsce w 2017 r.	78
Rysunek 4.3. Wysokość składek przypisanych brutto (w mln zł) oraz odszkodowań i świadczeń wypłaconych brutto (w mln zł) w Dziale I największych ubezpieczycieli (z pominięciem PZU ŻYCIE SA) w Polsce w 2017 r.	79
Rysunek 4.4. Wysokość składek przypisanych brutto (w mln zł) oraz odszkodowań i świadczeń wypłaconych brutto (w mln zł) w Dziale I najmniejszych ubezpieczycieli w Polsce w 2017 r.	80
Rysunek 5.1. Składki i rezerwy OC w kolejnych kwartałach lat 2012–2016	87
Rysunek 5.2. Koszty zakładów ubezpieczeń OC w kolejnych kwartałach lat 2012–2016	87
Rysunek 5.3. Koniunktura w działalności finansowej i ubezpieczeniowej w kolejnych miesiącach lat 2012–2016	88
Rysunek 5.4. Odszkodowania i świadczenia wypłacone brutto (w mln zł) w latach 2008–2017 – wartości empiryczne i średnie ruchome 3- i 5-okresowe	90
Rysunek 5.5. Liczba wypadków drogowych w Polsce w latach 2009–2018	92
Rysunek 5.6. Liczba wypadków drogowych w Polsce w kwartałach lat 2015–2018 oraz średnie ruchome 4 –okresowe	92
Rysunek 5.7. Liczba wypadków drogowych w Polsce w latach 2009–2018 oraz liniowa funkcja trendu	94
Rysunek 5.8. Wartość składki przypisanej brutto <i>per capita</i> w Dziale I i II w latach 2012–2017 (w zł)	97
Rysunek 5.9. Tempo zmian składki przypisanej brutto <i>per capita</i> (w zł) w Dziale I i II w latach 2012–2017 (w %)	99
Rysunek 5.10. Wysokość odszkodowań i świadczeń wypłaconych brutto przez zakłady ubezpieczeń w Polsce oraz dynamika zmian (rok poprzedni = 100) w latach 2009–2017	103
Rysunek 7.1. Prawdopodobieństwa rozkładu dwumianowego dla $n = 8$, $p = 0,1$	124
Rysunek 7.2. Prawdopodobieństwa rozkładu Poissona dla $\lambda = 1,2$	126
Rysunek 7.3. Funkcja gęstości rozkładu jednostajnego w przedziale $(0, 100)$	128
Rysunek 7.4. Funkcja gęstości rozkładu normalnego z parametrami $\mu = 50$, $\sigma = 12$	130
Rysunek 7.5. Funkcja gęstości rozkładu normalnego dla różnych wartości odchylenia standardowego i średniej równej 50	131

Rysunek 7.6. Funkcja gęstości rozkładu wykładniczego z $\lambda = 0,04$	133
Rysunek 7.7. Funkcja gęstości rozkładu wykładniczego dla różnych wartości λ . .	133
Rysunek 7.8. Funkcja gęstości rozkładu chi kwadrat z $v = 45$	135
Rysunek 7.9. Funkcja gęstości rozkładu chi kwadrat dla różnych wartości v	135
Rysunek 7.10. Aproksymacja wartości roszczeń za pomocą różnych rozkładów zmiennej losowej ciągłej	143
Rysunek 9.1. Indeks cen towarów i usług konsumpcyjnych, analogiczny okres roku poprzedniego = 100, 01.2017–07.2019.	168