

# **Wybrane zagadnienia ze statystyki i matematyki**



Agnieszka Baścik-Remisiewicz  
Izabela Chincinska  
Magdalena Miklaszewska

# **Wybrane zagadnienia ze statystyki i matematyki**

Przewodnik do ćwiczeń dla studentów biologii

Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego  
Gdańsk 2020

*Agnieszka Baścik-Remisiewicz* rozdziały 1–8, dodatki 1–4  
*Izabela Chincinska* przykłady 3.3–3.7, rozdział 3.3,  
rysunki 3.2, 3.4, 3.6–3.16, dodatki 4, 5  
*Magdalena Miklaszewska* wstęp do rozdziału 1, przykłady 4.4, 4.7,  
współautorstwo przykładu 5.6,  
zadania 4.1–4.8

Recenzja  
*prof. dr hab. Waldemar Karcz*

Redakcja wydawnicza  
*Agnieszka Kotwzan*  
*Dorota Zgaińska*

Projekt okładki i stron tytułowych  
*Małgorzata Miklaszewska*

Skład i łamanie  
*Maksymilian Biniakiewicz*

Publikacja dofinansowana ze środków dziekana Wydziału Biologii  
Uniwersytetu Gdańskiego

© Copyright by Uniwersytet Gdański,  
Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego

© Copyright by Agnieszka Baścik-Remisiewicz, Izabela Chincinska,  
Magdalena Miklaszewska, 2020

ISBN 978-83-7865-723-1

Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego  
ul. Armii Krajowej 119/121, 81-824 Sopot  
tel./fax 58 523 11 37, tel. 725 991 206  
e-mail: [wydawnictwo@ug.edu.pl](mailto:wydawnictwo@ug.edu.pl)  
[www.wyd.ug.edu.pl](http://www.wyd.ug.edu.pl)  
Księgarnia internetowa: [www.kiw.ug.edu.pl](http://www.kiw.ug.edu.pl)

Druk i oprawa  
Zakład Poligrafii Uniwersytetu Gdańskiego  
ul. Armii Krajowej 119/121, 81-824 Sopot  
tel. 58 523 14 49

# Spis treści

<b>Podziękowania</b> .....	<b>8</b>
<b>Przedmowa</b> .....	<b>9</b>
<b>1. Podstawowe pojęcia statystyki</b> .....	<b>11</b>
1.1. Rodzaje skal pomiarowych .....	11
1.1.1. Skala nominalna .....	11
1.1.2. Skala porządkowa .....	12
1.1.3. Skala interwałowa (przedziałowa) .....	13
1.1.4. Zamiana skal .....	13
1.2. Częstość występowania cechy w populacji .....	15
1.3. Dokładność pomiarów i zasady zaokrąglania liczb .....	16
1.3.1. Dokładność pomiarów .....	16
1.3.2. Zasady zaokrąglania liczb .....	17
1.3.3. Cyfry znaczące .....	19
1.4. Miary tendencji centralnej .....	21
1.4.1. Średnia arytmetyczna .....	21
1.4.1.1. Średnia arytmetyczna ważona .....	22
1.4.2. Średnia geometryczna .....	23
1.4.3. Średnia harmoniczna .....	23
1.5. Mediana i wartość modalna .....	24
1.5.1. Mediana .....	24
1.5.2. Wartość modalna .....	25
1.6. Miary rozproszenia .....	25
1.6.1. Wariancja i odchylenie standardowe .....	26
1.6.2. Błąd standardowy .....	28
1.6.3. Współczynnik zmienności .....	28
1.7. Kodowanie i transformacja danych .....	29
1.7.1. Kodowanie .....	29
1.7.2. Transformacja .....	31
1.8. Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	31
<b>2. Wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa</b> .....	<b>33</b>
2.1. Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa .....	33
2.1.1. Zdarzenie elementarne (losowe) oraz przestrzeń zdarzeń elementarnych .....	33
2.1.2. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa (Laplace'a) .....	34
2.1.3. Własności prawdopodobieństwa .....	34
2.1.4. Działania na zdarzeniach elementarnych (losowych) .....	35
2.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	38

<b>3. Zmienna losowa</b> .....	<b>40</b>
3.1. Zmienna losowa skokowa .....	40
3.1.1. Rozkład zero-jedynkowy .....	40
3.1.2. Rozkład dwumianowy .....	41
3.2. Zmienna losowa ciągła .....	47
3.2.1. Rozkład normalny .....	47
3.2.1.1. Standardowy rozkład normalny .....	50
3.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	60
<b>4. Planowanie doświadczeń i analiza statystyczna wyników badań</b> .....	<b>63</b>
4.1. Hipoteza badawcza .....	63
4.2. Hipoteza statystyczna .....	64
4.2.1. Hipoteza zerowa .....	64
4.2.2. Hipoteza alternatywna .....	65
4.2.3. Testy parametryczne i nieparametryczne .....	65
4.2.4. Poziom istotności i błąd pierwszego rodzaju .....	66
4.2.5. Błąd drugiego rodzaju i moc testu .....	67
4.3. Wybrane testy statystyczne .....	67
4.3.1. Test Q-Dixona .....	67
4.3.2. Testy $t$ -Studenta .....	69
4.3.2.1. Test $t$ -Studenta dla prób zależnych (pary związane) .....	69
4.3.2.2. Test $t$ -Studenta dla prób niezależnych .....	71
Próby o jednorodnej wariancji i różnej liczebności .....	72
Próby o jednorodnej wariancji i jednakowej liczebności .....	75
Test $t$ -Studenta z korektą Cochra-Coxa .....	78
4.3.3. Jednoczynnikowa analiza wariancji .....	80
4.4. Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	87
<b>5. Ciągi liczbowe</b> .....	<b>91</b>
5.1. Definicja ciągu .....	91
5.2. Monotoniczność ciągu .....	92
5.3. Granica ciągu .....	93
5.3.1. Granica właściwa ciągu .....	93
5.3.2. Granica niewłaściwa ciągu .....	93
5.4. Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	105
<b>6. Szeregi liczbowe</b> .....	<b>106</b>
6.1. Definicja szeregu liczbowego .....	106
6.2. Zbieżność i rozbieżność szeregu liczbowego .....	106
6.3. Wybrane kryteria zbieżności i rozbieżności szeregów .....	107
6.3.1. Kryterium d'Alemberta zbieżności szeregów .....	107
6.3.2. Kryterium d'Alemberta rozbieżności szeregów .....	107
6.3.3. Kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów .....	109
6.3.4. Kryterium Cauchy'ego rozbieżności szeregów .....	109
6.4. Zadania do samodzielnego rozwiązania .....	111
<b>7. Pochodna funkcji</b> .....	<b>112</b>
7.1. Pochodna funkcji w punkcie $x_0$ .....	112

7.2.	Twierdzenia o działaniach arytmetycznych na pochodnych	113
7.3.	Pochodna funkcji złożonej	116
7.4.	Zadania do samodzielnego rozwiązania	118
<b>8.</b>	<b>Całki</b>	<b>119</b>
8.1.	Całka nieoznaczona	119
8.1.1.	Własności całki nieoznaczonej	119
8.1.1.1.	Obliczanie całek z wykorzystaniem podstawowych wzorów rachunku całkowego	119
8.1.1.2.	Całkowanie przez rozkład na sumę całek	123
8.1.1.3.	Całkowanie przez podstawienie	125
8.1.1.4.	Całkowanie przez części	127
8.2.	Całka oznaczona	128
8.2.1.	Interpretacja geometryczna całki oznaczonej	129
8.2.2.	Własności całki oznaczonej	129
8.2.3.	Związek między całką oznaczoną a całką nieoznaczoną	130
8.2.4.	Zamiana zmiennej w całce oznaczonej	132
8.3.	Zadania do samodzielnego rozwiązania	134
	<b>Odpowiedzi do zadań</b>	<b>136</b>
	<b>Dodatki</b>	
1.	Ciągi	142
2.	Pochodna funkcji	144
3.	Całki	145
4.	Instrukcja obsługi kalkulatora naukowego – tryb statystyczny	146
5.	Tablice statystyczne	156
	<b>Bibliografia</b>	<b>169</b>
	<b>Indeks</b>	<b>170</b>