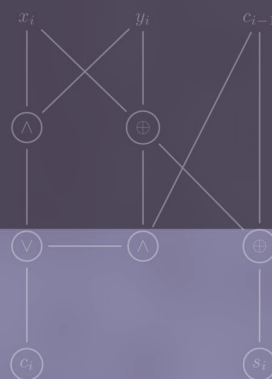


Andrzej Szepietowski

Matematyka dyskretna



Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego

Matematyka dyskretna

Andrzej Szepietowski

Matematyka dyskretna

Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego
Gdańsk 2018

Recenzja
prof. dr hab. *Marek Zaionc*

Redakcja wydawnicza
Dorota Zgaińska

Projekt okładki i stron tytułowych
Gabriela Gic-Grusza

Skład i łamanie
Marcin Babnis

Wydanie drugie poprawione

© Copyright by Uniwersytet Gdański
Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego

ISBN 978-83-7865-747-7

Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego
ul. Armii Krajowej 119/121, 81-824 Sopot
tel./fax 58 523 11 37, tel. 725 991 206
e-mail: wydawnictwo@ug.edu.pl
www.wyd.ug.edu.pl

Księgarnia internetowa: www.kiw.ug.edu.pl

Spis treści

Przedmowa	13
1 Podstawowe pojęcia, oznaczenia	15
1.1 Sumy	15
1.2 Iloczyny	16
1.3 Zbiory	17
1.4 Różnica symetryczna zbiorów	18
1.5 Iloczyn kartezjański	19
1.6 Rodzina zbiorów	20
1.7 Grafy (nieskierowane)	21
1.8 Drzewa	23
1.9 Drzewa ukorzenione	24
1.10 Grafy skierowane	25
1.11 Słowa	25
1.12 Zaokrąglenia	27
1.13 Przedrostki	27
1.14 Notacja asymptotyczna	28
1.15 Wielomiany	30
1.15.1 Dzielenie wielomianów	31
1.15.2 Schemat Horna	32
1.15.3 Pierwiastki wielomianu	33
1.16 Zadania	33
2 Arytmetyka	37
2.1 System dziesiętny	37
2.2 System dwójkowy	38
2.3 Zwiększanie liczby o jeden	39
2.4 Porównywanie liczb	40
2.5 Operacje arytmetyczne w systemie dwójkowym	40
2.6 Zamiana systemu	41
2.7 Długość liczby	43
2.8 Duże liczby	44
2.9 Ułamki	44
2.10 System szesnastkowy	45
2.11 Reprezentacja liczb w komputerze	46
2.11.1 Integer	47
2.11.2 Real	48

2.12	Wyrażenia arytmetyczne w języku Pascal	48
2.13	Poszukiwania binarne (<i>binary search</i>)	49
2.13.1	Poszukiwanie pierwiastka	50
2.14	Zadania	51
2.15	Problemy	52
2.15.1	Uzupełnieniowy zapis liczb ujemnych	52
2.15.2	Liczby w postaci ósemkowej i szesnastkowej w języku C	52
2.15.3	Sumy potęg dwójki	52
2.15.4	Waga	52
3	Kombinatoryka	55
3.1	Zasada podwójnego zliczania	55
3.2	Ciągi	56
3.3	Funkcje	57
3.4	Ciągi bez powtórzeń	57
3.5	Permutacje	58
3.6	Podzbiory	60
3.7	Podzbiory k -elementowe	61
3.8	Dwumian Newtona	63
3.9	Zasada szufladkowa Dirichleta	64
3.10	Zasada sumy	64
3.11	Zasada włączania i wyłączania	65
3.12	Przestawienia	68
3.13	Generowanie obiektów kombinatorycznych	69
3.13.1	Generowanie podzbiorów	69
3.13.2	Generowanie k -elementowych podzbiorów	70
3.13.3	Generowanie permutacji	71
3.14	Zadania	71
3.15	Problemy	74
3.15.1	Najkrótsze drogi	74
3.15.2	Rozmieszczanie przedmiotów w pudełkach.	75
3.15.3	Wybór n przedmiotów k rozróżnialnych typów	75
3.15.4	Kombinacje z powtórzeniami	76
3.15.5	Permutacje z powtórzeniami	76
3.15.6	Podziały uporządkowane	76
3.15.7	Permutacje bez punktów stałych	77
3.15.8	Liczba surjekcji	77
3.15.9	Twierdzenie Ramseya	77
3.15.10	Twierdzenie Halla o różnych reprezentantach	78
4	Rachunek prawdopodobieństwa	81
4.1	Przestrzeń zdarzeń elementarnych	81
4.1.1	Zdarzenia	81
4.1.2	Dalsze przykłady przestrzeni zdarzeń elementarnych	82
4.2	Prawdopodobieństwo	83
4.2.1	Klasyczna definicja prawdopodobieństwa, rozkład jednostajny	84
4.2.2	Własności prawdopodobieństwa	84

4.3	Prawdopodobieństwo warunkowe	85
4.4	Zdarzenia niezależne	86
4.5	Prawdopodobieństwo całkowite	87
4.6	Schemat dwumianowy (Bernoulliego)	89
4.6.1	Rzut symetryczną monetą	89
4.6.2	Kolorowanie wierzchołków grafu	90
4.6.3	Trzykrotny rzut niesymetryczną monetą	91
4.6.4	Ogólny schemat – n -krotny rzut niesymetryczną monetą	92
4.7	Zmienna losowa	93
4.7.1	Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej	93
4.7.2	Dalsze przykłady zmiennych losowych	94
4.7.3	Rozkład jednopunktowy	95
4.7.4	Rozkład zero-jedynkowy	95
4.8	Łączny rozkład prawdopodobieństwa	95
4.8.1	Gęstość łącznego rozkładu	96
4.9	Niezależność zmiennych losowych	97
4.9.1	Własność niezależnych zmiennych losowych	98
4.10	Rozkład dwumianowy (Bernoulliego)	99
4.11	Wartość oczekiwana, średnia	100
4.11.1	Własności wartości oczekiwanej	100
4.11.2	Wartość oczekiwana rozkładu jednopunktowego	101
4.11.3	Wartość oczekiwana rozkładu zero-jedynkowego	102
4.11.4	Wartość oczekiwana rozkładu dwumianowego	102
4.11.5	Wartość oczekiwana liczby różnokolorowych krawędzi	102
4.11.6	Własności wartości oczekiwanej, cd.	103
4.12	Nierówność Markowa	103
4.13	Wariancja	104
4.13.1	Wariancja rozkładu jednopunktowego	105
4.13.2	Wariancja rozkładu zero-jedynkowego	105
4.13.3	Wariancja rozkładu dwumianowego	105
4.13.4	Wariancja liczby różnokolorowych krawędzi	105
4.14	Nierówność Czebyszewa	106
4.15	Krańce rozkładu dwumianowego	107
4.16	Problem dnia urodzin	107
4.17	Algorytmy probabilistyczne	108
4.17.1	Algorytm z jednostronnym błędem	108
4.17.2	Algorytm sprawdzający mnożenie wielomianów	108
4.17.3	Algorytmy z błędem obustronnym	109
4.17.4	Algorytm kolorowania wierzchołków grafu	109
4.18	Zadania	110
4.19	Problemy	114
4.19.1	Niezależność zmiennych losowych	114

5	Funkcje boolowskie	115
5.1	Algebra Boole'a	115
5.1.1	Algebra podzbiorów	117
5.1.2	Alternatywa wykluczająca, xor	117
5.2	Wyrażenia boolowskie	118
5.2.1	Wyrażenia boolowskie w języku Pascal	119
5.3	Funkcje boolowskie	120
5.3.1	Funkcje boolowskie jednej zmiennej	120
5.3.2	Funkcje boolowskie dwóch zmiennych	121
5.3.3	Alternatywa i koniunkcja n zmiennych	122
5.3.4	Funkcja progowa	122
5.3.5	Postacie normalne funkcji boolowskich	123
5.4	Wielowartościowe funkcje boolowskie	124
5.5	Sieci boolowskie	125
5.5.1	Sieć dla alternatywy kilku zmiennych	126
5.5.2	Sumator	127
5.6	Operacje boolowskie na wektorach	128
5.6.1	Reprezentacja zbioru	129
5.6.2	Operacje na wektorach w języku Pascal	130
5.6.3	Operacje na wektorach w języku C	130
5.6.4	Flagi	131
5.6.5	Reprezentacja ustawienia bierek w grze w szachy	131
5.6.6	Szyfrowanie w systemie one-pad	131
5.7	Funkcja parzystości (<i>parity</i>)	133
5.8	Odciski, zabezpieczanie danych	134
5.9	Zadania	136
5.10	Problemy	137
5.10.1	Gra w kamienie	137
5.10.2	Tożsamości w algebrze podzbiorów	137
5.10.3	Sieci funkcji progowych i sortujących	138
5.10.4	Wspólne losowanie bitów	138
6	Teoria liczb	139
6.1	Dzielenie całkowitoliczbowe	139
6.2	Podzielność liczb	140
6.3	Relacja kongruencji	141
6.4	Klasy abstrakcji	142
6.5	Pierścień \mathbb{Z}_m	143
6.5.1	Pierścień \mathbb{Z}_5	144
6.5.2	Pierścień \mathbb{Z}_4	145
6.6	Największy wspólny dzielnik	145
6.7	Algorytm Euklidesa	146
6.7.1	Rozszerzony algorytm Euklidesa	147
6.8	Liczby pierwsze i względnie pierwsze	149
6.9	Rozkład liczb na czynniki pierwsze	149
6.10	Elementy odwracalne	151
6.11	Funkcja liniowa	152

6.12	Szyfry liniowe	154
6.13	Chińskie twierdzenie o resztach	156
6.14	Obliczenia na dużych liczbach	159
6.15	Szybkie potęgowanie	161
6.16	Pierwiastki kwadratowe	163
6.17	Funkcja Eulera	164
6.18	Małe twierdzenie Fermata	164
6.19	Szyfry RSA	165
6.20	Testy pierwszości	166
6.20.1	Test naiwny	166
6.20.2	Test Fermata	166
6.20.3	Test Millera-Rabina	167
6.20.4	Losowanie liczb pierwszych	169
6.21	Zadania	169
6.22	Problemy	171
6.22.1	Największy wspólny dzielnik	171
6.22.2	Najmniejsza wspólna wielokrotność	172
6.22.3	Liczby względnie pierwsze	172
6.22.4	Liczby pierwsze	172
6.22.5	Chińskie twierdzenie o resztach	172
6.22.6	System szyfrowania one-pad	172
6.22.7	Przestrzeń liniowa	173
6.22.8	Uogólnienie małego twierdzenia Fermata	173
6.22.9	Algorytm Euklidesa dla wielomianów	173
6.22.10	Wspólne losowanie liczby, gra w marynarza	173
7	Stosy, kolejki i drzewa	175
7.1	Listy	175
7.2	Stosy i kolejki	175
7.3	Implementacja stosu	176
7.4	Implementacja kolejki	177
7.5	Drzewa ukorzenione	178
7.6	Drzewa binarne	178
7.7	Drzewa wyrażeń arytmetycznych	179
7.8	Przeszukiwanie drzew binarnych	182
7.8.1	Przeszukiwanie drzewa w głąb	182
7.8.2	Przeszukiwanie drzewa w szerz	183
7.9	Drzewa decyzyjne	184
7.10	Drzewo gry	185
7.10.1	Algorytm waluacji drzewa gry	187
7.11	Zadania	189
7.12	Problemy	189
7.12.1	Szukanie fałszywej monety	189

8 Rekurencja	191
8.1 Wieże Hanoi	191
8.2 Drzewo rekursji	192
8.3 Algorytm Euklidesa, wersja rekurencyjna	193
8.3.1 Rekurencyjne algorytmy przeszukiwania drzew	194
8.4 Drzewa poszukiwań binarnych	195
8.5 Funkcje rekurencyjne	197
8.6 Funkcja (ciąg) Fibonacciego	197
8.7 Algorytm sortowania przez scalanie	198
8.8 Rozwiązywanie równań i nierówności rekurencyjnych	199
8.9 Metoda podstawiania	199
8.10 Metoda iteracyjna	201
8.11 Metoda rekurencji uniwersalnej	202
8.12 Funkcje tworzące	203
8.13 Zadania	204
8.14 Problemy	207
8.14.1 Wieże Hanoi	207
9 Grafy (nieskierowane)	209
9.1 Izomorfizm grafów	210
9.2 Drogi i cykle	211
9.3 Drzewa	212
9.4 Przeszukiwanie grafów w głąb	214
9.5 Algorytm przeszukiwania grafu wszerz	215
9.6 Liczenie składowych spójności	216
9.7 Drzewa spinające	216
9.8 Fundamentalny zbiór cykli	218
9.9 Minimalne drzewo spinające	220
9.10 Cykle i drogi Eulera	221
9.11 Drogi i cykle Hamiltona	224
9.12 Kolorowanie grafów	225
9.12.1 Kolorowanie z nawrotami	225
9.12.2 Kolorowanie grafu dwoma kolorami	227
9.12.3 Heurystyki kolorowania grafów	228
9.13 Hiperkostka	228
9.13.1 Rozgłaszanie wiadomości	230
9.13.2 Zbieranie informacji	231
9.13.3 Plotkowanie	231
9.14 Zadania	231
9.15 Problemy	233
9.15.1 Drzewa spinające	233
9.15.2 Skojarzenia	234
9.15.3 Minimalne drzewo spinające	234
9.15.4 Cykle Eulera	234

10 Grafy skierowane	237
10.1 Podstawowe definicje	237
10.2 Najkrótsze drogi w grafie	238
10.3 II etap	239
10.4 Algorytm Forda-Bellmana	239
10.5 Dodatnie długości, algorytm Dijkstry	241
10.6 Najkrótsza droga w grafach acyklicznych	243
10.7 Zadania	245
10.8 Problemy	245
10.8.1 Spójność	245
10.8.2 Cykl Eulera w grafie skierowanym	246
10.8.3 Ciąg de Bruijna	246
Bibliografia	247
Skorowidz	248

